

## Aplikasi Model Ekuivalen plat (EPM) Guna Analitis Statistik dan Dinamik Struktur Sayap Pesawat Udara

Ismoyo Haryanto, Djoeli Satrijo, Toni Prahasto

Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik

Universitas Diponegoro

Kampus Tembalang Jl. Prof. Soedarto SH, Semarang

e-mail : [ismoyo2001@yahoo.de](mailto:ismoyo2001@yahoo.de)

### Abstrak

*Model Ekuivalen Plat (EPM) telah diverifikasi dan diterapkan guna analisis statis maupun dinamis struktur sayap pesawat udara. Dari kaji kasus diperoleh bahwa penerapan EPM pada struktur sayap memberikan frekuensi natural, perpindahan maupun tegangan yang mempunyai kesesuaian sangat baik dengan hasil yang diperoleh dari FEM. Oleh karena itu terdapat peluang yang sangat besar untuk menerapkan EPM pada proses optimasi struktur sayap.*

*Kata kunci: Model Ekuivalen Plat (EPM), FEM, analisis statik dan dinamis, optimasi*

### 1. Pendahuluan

Pada tahap perancangan awal (*preliminary design*) struktur sayap pesawat udara sering kali diterapkan model batang sederhana guna analisis strukturnya. Akan tetapi, sekalipun cukup populer, model tersebut kemampuannya sangat terbatas untuk menggambarkan struktur sayap secara realistis. Sehingga model batang sederhana tidak cocok jika digabungkan dengan program optimasi. Pada sisi yang lain, sekalipun Metode Elemen Berhingga (FEM) dapat diterapkan untuk memodelkan struktur yang lebih umum serta memberikan hasil yang lebih akurat dibanding model batang sederhana namun penerapan FEM pada tahap perancangan awal kurang menarik karena membutuhkan biaya komputasi yang mahal. Oleh karena itu pada tahap perancangan awal struktur sayap dibutuhkan pemodelan struktur yang dapat menjembatani antara model batang sederhana dan FEM. Salah satu pemodelan struktur tersebut adalah Model Ekuivalen Plat (*Equivalent Plate Model*, EPM).

Terdapat beberapa studi tentang penerapan EPM guna pemodelan struktur sayap. Giles [1][2] telah mengembangkan pendekatan yang didasarkan pada metode Ritz dan teori plat Kirchoff. Dengan pendekatan ini struktur sayap dibagi menjadi sejumlah trapesoida dan struktur internal sayap (rib dan spar) dinyatakan dengan bentuk polinomial sederhana. Kemudian Tizzi [3] menerapkan pendekatan yang telah dikembangkan oleh Giles guna analisis struktur sayap yang terdiri dari beberapa segmen, akan tetapi struktur internal sayap seperti rib dan spar belum dilibatkan. Livne [4] selanjutnya memformulasikan suatu pendekatan baru dari EPM dimana deformasi geser mulai diperhitungkan (teori plat Mindlin). Pemodelan ini didasarkan pada fungsi polinomial sederhana (sebagai vektor fungsi Ritz). Formulasi ini dapat diterapkan pada struktur sayap yang terdiri dari kulit (*skin*) serta sejumlah rib dan spar. Livne dan Navarro [5] kemudian mengembangkan metode tersebut lebih lanjut dengan mempertimbangkan aspek-aspek non linieritas struktur. Sedangkan untuk menghindari masalah *numerical ill-conditioning* Kapania dan Lovejoy [6] begitu juga Kapania dan Liu [7] menerapkan polinomial ortogonal, khususnya polinomial Legendre atau Chebisev, sebagai vektor fungsi Ritz. Pada paper ini hanya EPM yang didasarkan pada teori Plat Midlin (karena bersifat lebih umum) beserta penerapannya guna analisis statik dan dinamik struktur sayap, lebih lanjut dibicarakan.

### 2. Metode Ekuivalen Plat (EPM)

#### 2.1 Asumsi dan Formulasi

Teori Plat Mindlin memungkinkan untuk menyertakan efek deformasi geseran sehingga menjadi alternatif yang menarik dari Teori Plat Tipis Kirchoff. Beberapa asumsi yang digunakan adalah :

- geseran yang terjadi jauh lebih kecil dari ketebalan plat
- tegangan yang tegak lurus bidang tengah plat diabaikan
- garis normal terhadap bidang tengah sebelum dan sesudah deformasi tetap lurus.

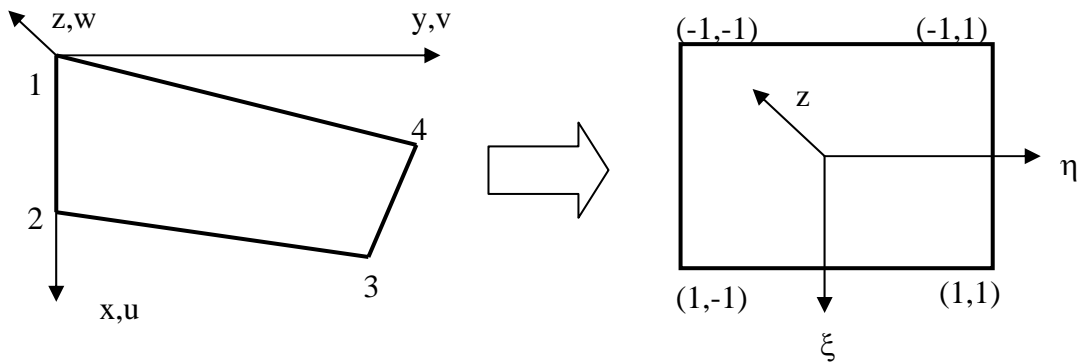
Dengan asumsi tersebut dan dengan menerapkan prinsip linieritas maka medan pergeseran plat dapat diformulasikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\
 w(x, y, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Dimana  $x$  dan  $y$  koordinat bidang tengah plat sedangkan  $z$  menyatakan koordinat dalam arah ketebalan plat. Pergeseran dalam arah  $x, y, z$  dinyatakan dengan  $u, v,$  dan  $w$  seperti ditunjukkan pada Gambar 1. Sedangkan  $\phi_x$  dan  $\phi_y$  masing-masing menyatakan rotasi terhadap sumbu  $y$  dan  $x$ . Subscript 0 menunjukkan pergeseran pada bidang  $z = 0$ .

Selanjutnya regangan struktur dapat dinyatakan dengan pers. (2). Dan untuk kemudahan analisis maka trapesoida dalam bidang  $(x,y)$  ditransformasikan menjadi bujur sangkar di bidang  $(\xi,\eta)$  seperti ditunjukkan pada Gambar 1.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} & \gamma_{xy} &= \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \gamma_{zx} &= \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$



Gambar 1 Sistem Koordinat dan Transformasinya

Selanjutnya  $u_0, v_0, w_0, \phi_x$  dan  $\phi_y$  dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \{B_{IJ}\}^T \{q_U\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J U_{ij}(t) B_i(\xi) B_j(\eta) \quad ; \quad v_0 = \{B_{KL}\}^T \{q_V\} = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L U_{kl}(t) B_k(\xi) B_l(\eta) \\
 w_0 &= \{B_{MN}\}^T \{q_W\} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn}(t) B_m(\xi) B_n(\eta); \quad \phi_x = \{B_{PQ}\}^T \{q_X\} = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q U_{pq}(t) B_p(\xi) B_q(\eta) \tag{3} \\
 \phi_y &= \{B_{RS}\}^T \{q_Y\} = \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S U_{rs}(t) B_r(\xi) B_s(\eta)
 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \{q_U\} \\ \{q_V\} \\ \{q_W\} \\ \{q_X\} \\ \{q_Y\} \end{Bmatrix} = [H] \{q\} \quad ; \quad [H] = \begin{bmatrix} \{B_{IJ}\}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{B_{KL}\}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{B_{MN}\}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \{B_{PQ}\}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{B_{RS}\}^T \end{bmatrix} \quad (4)$$

di mana

$$\begin{Bmatrix} B_{\mu\nu} \end{Bmatrix} = \{B_1(\xi)B_1(\eta), B_1(\xi)B_2(\eta), \dots, B_\mu(\xi)B_\nu(\eta)\}^T \quad (5)$$

$\mu\nu = IJ, KL, MN, PQ, RS$

yang dikenal dengan vektor fungsi dasar Ritz. Untuk mendefinisikan  $B_i(x)$  dapat diterapkan polinomial Legendre atau Chebyshev:

## 2.2 Matriks Kekakuan

Jika  $[\bar{D}]$  menyatakan matriks material (*Constitutive Matrix*) pada kondisi tegangan  $\sigma_z = 0$  maka energi regangan struktur dapat dinyatakan dengan:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{vol} \{\varepsilon\}^T [\bar{D}] \{\varepsilon\} dV \quad (6)$$

Dengan menerapkan Pers. (2) – (6), regangan struktur dapat dirumuskan kembali dalam bentuk:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & z\bar{J}_{11} & z\bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & z\bar{J}_{12} & z\bar{J}_{22} & 0 & 0 \\ \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} & \bar{J}_{11} & \bar{J}_{21} & 0 & 0 & z\bar{J}_{12} & z\bar{J}_{22} & z\bar{J}_{11} & z\bar{J}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{11} & \bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial \xi \\ \partial u_0 / \partial \eta \\ \partial v_0 / \partial \xi \\ \partial v_0 / \partial \eta \\ \partial w_0 / \partial \xi \\ \partial w_0 / \partial \eta \\ \partial \phi_x / \partial \xi \\ \partial \phi_x / \partial \eta \\ \partial \phi_y / \partial \xi \\ \partial \phi_y / \partial \eta \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = [\bar{T}] \{\bar{\varepsilon}\} \quad (7)$$

dan

$$\{\bar{\varepsilon}\} = [C] \begin{Bmatrix} \{q_U\} \\ \{q_V\} \\ \{q_W\} \\ \{q_X\} \\ \{q_Y\} \end{Bmatrix} = [C]\{q\} \quad \text{dengan} \quad [C] = \begin{bmatrix} [B_{IJ,\xi\eta}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [B_{KL,\xi\eta}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [B_{MN,\xi\eta}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [B_{PQ,\xi\eta}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [B_{RS,\xi\eta}] \\ 0 & 0 & 0 & \{B_{PQ}\}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{B_{RS}\}^T \end{bmatrix} \quad (8)$$

di mana

$$[B_{\mu\nu,\xi\eta}] = \begin{bmatrix} B_1'(\xi)B_1(\eta) & B_1'(\xi)B_2(\eta) & \dots & B_\mu'(\xi)B_\nu(\eta) \\ B_1(\xi)B_1'(\eta) & B_1(\xi)B_2'(\eta) & \dots & B_\mu(\xi)B_\nu'(\eta) \end{bmatrix} \quad \{B_{\mu\nu}\} = \{B_1(\xi)B_1(\eta) \quad B_1(\xi)B_2(\eta) \quad \dots \quad B_\mu(\xi)B_\nu(\eta)\} \quad (9)$$

Sehingga Pers. (6) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{vol} \{\bar{q}\}^T [C]^T [\bar{T}]^T [\bar{D}] [\bar{T}] [C] \{\bar{q}\} dV \quad (10)$$

dengan

$$\iiint_{vol} [C]^T [\bar{T}]^T [\bar{D}] [\bar{T}] [C] dV = [\tilde{K}] \quad (11)$$

menyatakan matriks kekakuan struktur.

### 2.3 Matriks Massa

Jika  $\rho$  dan  $\bar{v}$  menyatakan rapat massa dan vektor kecepatan struktur maka energi kinetiknya dinyatakan dengan:

$$T = \frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho \bar{v}^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho \{\bar{v}\}^T \{\bar{v}\} dV \quad (12)$$

dengan:

$$\{\bar{v}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial t} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \\ \frac{\partial w_0}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Dengan substitusi Pers. (4) ke (13) maka Pers. (13) menjadi:

$$T = \frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho \{\dot{\bar{q}}\}^T [H]^T [\bar{Z}] [H] \{\dot{\bar{q}}\} dV \quad ; \quad [\bar{Z}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & z^2 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Dengan  $\{\dot{\bar{q}}\}$  menyatakan turunan waktu dari vektor  $\{\bar{q}\}$  dan

$$\iiint_{vol} \rho [H]^T [\bar{Z}] [H] dV = [\tilde{M}] \quad (15)$$

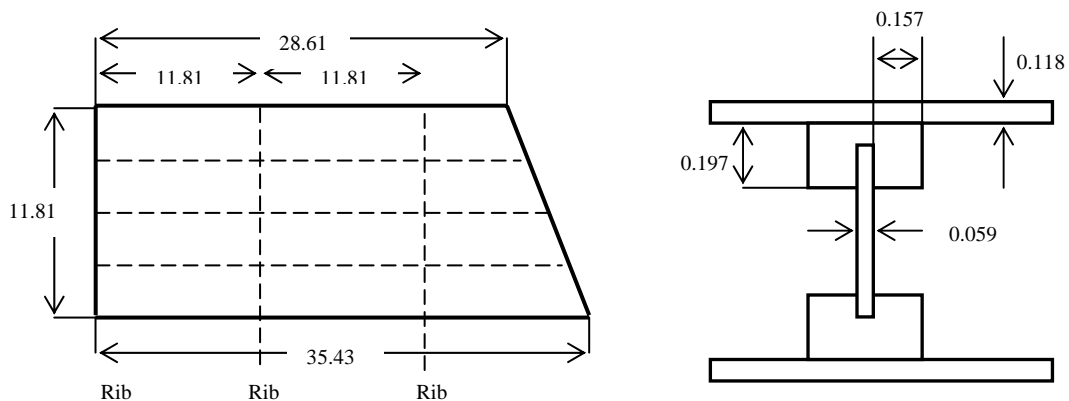
menyatakan matriks massa struktur.

### 2.5 Kondisi Batas

Untuk memodelkan kondisi batas pada struktur dapat diterapkan pegas artifisial dengan kekakuan yang besar pada sisi struktur [8][9]. Jika struktur dijepit maka pada sisi struktur yang dijepit diterapkan pegas linier maupun rotasional dengan kekakuan yang sangat besar.

### 3. Hasil dan Pembahasan

Sebagai contoh pada paper ini akan digunakan dua struktur sayap yaitu *sayap AGARD*. Gambar 2 menunjukkan geometri dan konfigurasi sayap AGARD [8]. Sayap terbuat dari aluminium dan mempunyai sudut sribak  $30^\circ$  serta terdiri dari lima spar dan tiga rib dengan penampang identik yang membungkus kulit sayap bagian atas dan bawah (Gambar 3). Guna analisis statik dianggap sebuah gaya vertikal sebesar 1-lb diterapkan pada ujung sayap bagian belakang (*trailing edge*).



Gambar 2 Geometri dan konfigurasi sayap AGARD serta geometri penampang rib dan spar (inci)

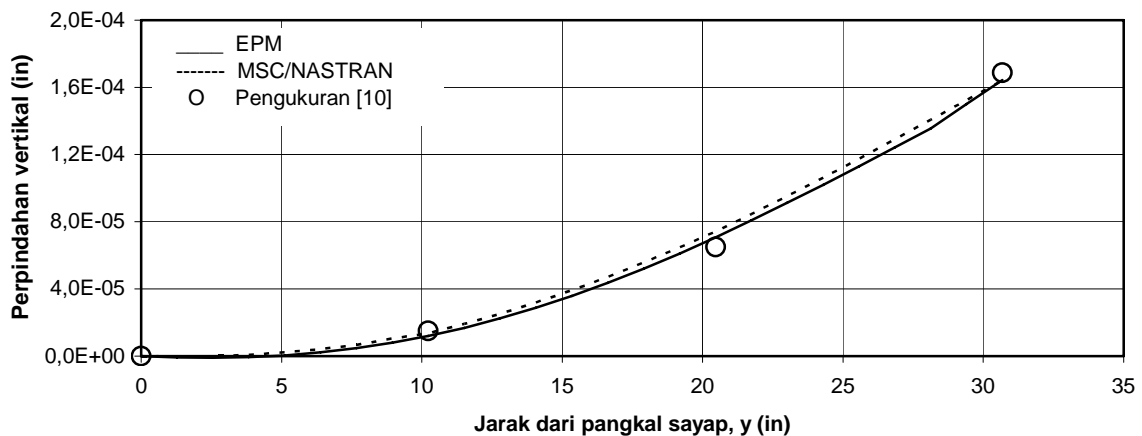
Tabel 1 menunjukkan frekuensi natural sayap AGARD hasil dari analisis dengan menerapkan EPM yang dikembangkan pada penelitian ini dibandingkan dengan frekuensi natural yang dihasilkan dari analisis menggunakan FEM (MSC/NASTRAN). Dengan MSC/NASTRAN kulit sayap dimodelkan dengan CQUAD4 dan rib cap serta spar cap dimodelkan dengan CBAR sedangkan rib dan spar dimodelkan dengan CQUAD4. Dari Tabel 1 tampak bahwa frekuensi natural yang diperoleh dari analisis dengan menerapkan EPM yang memberikan hasil yang mendekati dengan hasil yang

diperoleh dari MSC/NASTRAN. Tampak pula bahwa kesalahan yang terjadi akan semakin membesar untuk modus getar yang lebih tinggi. Untuk memperoleh ketelitian yang lebih baik pada modus getar yang tinggi dapat diterapkan polynomial dengan orde yang lebih besar. Akan tetapi hal tersebut akan mengakibatkan waktu komputasi yang semakin lama.

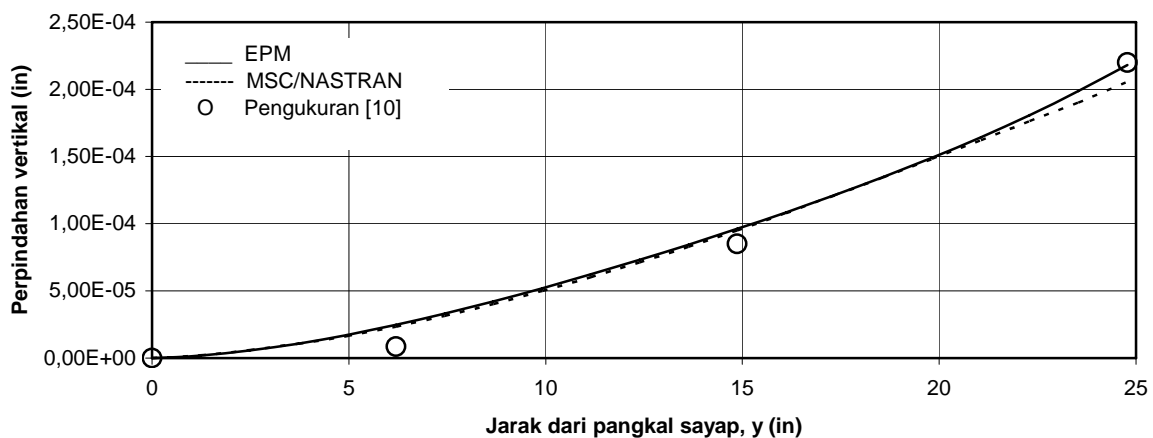
Tabel 1 Frekuensi Natural Sayap AGARD

No.	Modus	Frekuensi Natural (Hz)	
		MSC/NASTRAN	Present EPM
1	Bending-1	116.8	116.4
2	In plane-1	341.2	349.9
3	Torsi-1	407.8	390.7
4	Bending-1	567.5	542.9
5	Torsi-2	1016.0	1034.3
CPU time, s		17.9	7.0

Gambar 3 menunjukkan perpindahan vertikal front spar dan rear spar sayap. Tampak bahwa hasil yang diperoleh dengan EPM memberikan kesesuaian yang cukup memuaskan dengan hasil dari FEM maupun pengukuran. Sedangkan tegangan normal kulit sayap pada arah sumbu elastis sepanjang pangkal sayap ditunjukkan pada Gambar 4. Dapat dilihat juga jika tegangan normal kulit yang diperoleh dari EPM mempunyai tendensi yang sama dengan hasil pengukuran maupun FEM

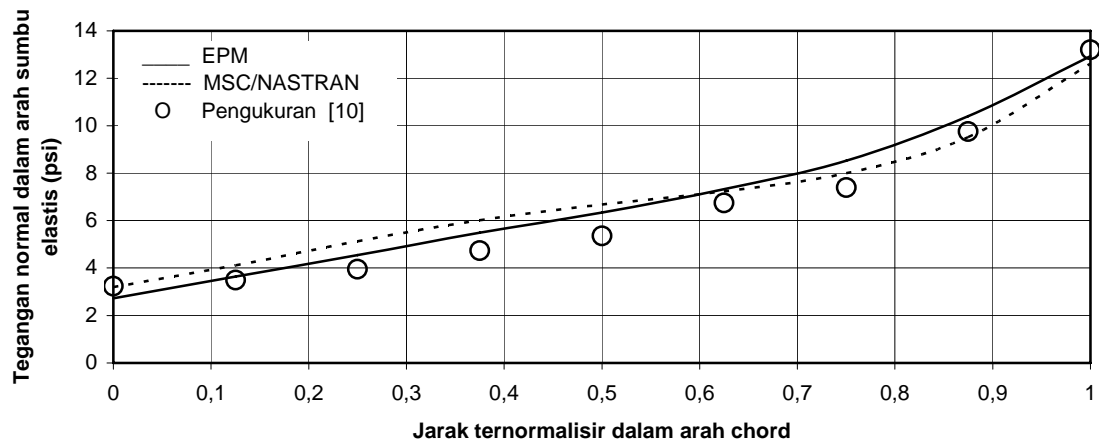


(a)



(b)

Gambar 3 Perpindahan vertikal (a) front spar dan (b) rear spar sayap AGARD



Gambar 4 Tegangan normal kulit dalam arah sumbu elastis sepanjang pangkal sayap

#### 4. Kesimpulan

Sebuah program komputer Model Ekuivalen Plat (EPM) telah disusun dan diterapkan guna analisis statis maupun dinamis struktur sayap pesawat udara. Sebagai kaji kasus diterapkan model sayap AGARD karena hasil koputasi dengan FEM maupun hasil pengukuran telah diketahui sehingga akan lebih mudah validasi hasil yang diperoleh. Dari kaji kasus diperoleh bahwa penerapan EPM pada struktur sayap memberikan frekuensi natural, perpindahan maupun tegangan yang mempunyai kesesuaian sangat baik dengan hasil yang diperoleh dari FEM. Keuntungan lain adalah bahwa analisis dengan EPM, untuk kausus yang sama, waktu komputasi yang diperlukan relatif lebih pendek dibanding dengan FEM. Oleh karena itu terdapat peluang yang sangat besar untuk menerapkan EPM pada proses optimasi struktur sayap. Meskipun demikian perlu dikaji lebih lanjut pengembangan EPM guna analisis struktur tak sebidang (non planar).

#### 5. Daftar Pustaka

1. Giles, G. L., "Equivalent Plate Analysis of Aircraft Wing Box Structures with General Planform Geometry", *Journal of Aircraft*, Vol. 23, No. 11, November 1986, pp. 859-864
2. Giles, G. L., "Further Generalization of an Equivalent Plate Representation for Aircraft Structural Analysis", *Journal of Aircraft*, Vol. 26, No. 1, January 1989, pp. 67-74.
3. Tizzi, S., "Numerical Procedure for the Dynamic Analysis of Three - Dimensional Aeronautical Structures", *Journal of Aircraft*, Vol. 34, No. 1, January-February 1997, pp. 120-130.
4. Livne, E., "Equivalent Plate Structural Modeling for Wing Shape Optimization Including Transverse Shear", *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 6, 1994, pp. 1278-1288.
5. Livne, E. and Navarro, I., "Nonlinear Equivalent Plate Modeling of a Wing Box Structures", *Journal of Aircraft*, Vol. 36, No. 5, January-February 1999, pp. 851-865.
6. Kapania, R.K., and Lovejoy, A.E., "Free Vibration of Thick Generally Laminated Quadrilateral Plates with Point Supports", *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 7, 1996, 1474-1480.
7. Kapania, R.K. and Liu, Y., "Static and Vibration Analyses of General Wing Structures Using Equivalent Plate Models", *AIAA Journal*, Vol. 38, No. 7, July 2000, pp. 1269-1277.
8. Lepi, S.M., *Practical Guide to Finite Element*, Marcel Dekker, Inc, New York, Basel, Hongkong, 1998, Chapter 6, pp. 377-416.
9. Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method, 3<sup>rd</sup> ed.", Tata McGraw-Hill Publishing Co. Ltd., New Delhi, 1971.
10. Turner, M.J., Martin, H.C., and Weikel, R.C., "Further Development and Application of the Stiffness Method," *Matrix Methods of Structural Analysis*, edited by F.B. de Veubeker, Pergamon, Oxford, England, U.K., 1964, pp. 203-266.

