

## Aplikasi Metode Elemen Hingga untuk Menentukan Frekuensi Pribadi dan Modus Getar Poros Rotor

**Amir Zaki Mubarak, Fuadi Noor Balia, Akhyar**

Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Syiah Kuala  
Jl. Tgk. Syech Abdurrauf, No. 7, Darussalam, Banda Aceh 23111  
E-mail: amir\_zaki\_mubarak@yahoo.com

### Abstrak

*Analisis getaran sangat penting untuk dipertimbangkan dalam perencanaan poros rotor. Kegagalan pada poros rotor dapat dihindari dengan mengetahui karakteristik dinamikanya. Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan program komputer untuk menentukan frekuensi pribadi dan modus getar poros rotor. Metode elemen hingga digunakan untuk menentukan karakteristik sistem yang diperoleh dari persamaan energi kinetik dan potensialnya. Dengan pendekatan ini dikembangkan program komputer menggunakan MATLAB. Model yang dianalisis merupakan sistem rotor yang terdiri dari sebuah poros rotor dan sebuah piringan. Poros rotor dibagi menjadi beberapa elemen garis. Melalui matrik global dari tiap-tiap elemen ini diperoleh nilai eigen dan vektor eigen sehingga didapatkan frekuensi pribadi dan modus getar sistem. Validasi hasil simulasi program dengan analisis secara manual menunjukkan bahwa hasil yang didapat dari analisis program sangat dekat dengan analisis secara manual.*

*Kata kunci: karakteristik dinamik, frekuensi pribadi, modus getar, metode elemen hingga.*

### 1. Pendahuluan

Diantara komponen-komponen utama sistem rotor, sering dijumpai kegagalan terjadi pada poros rotor yang umumnya disebabkan oleh getaran sistem. Analisis getaran merupakan salah satu faktor yang perlu dipertimbangkan dalam perencanaan suatu poros rotor. Kegagalan pada poros rotor dapat dihindari dengan mengetahui frekuensi pribadi dan modus getarnya.

Analisis karakteristik dinamik ini umumnya membutuhkan ketelitian dan waktu yang cukup lama. Seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi komputer maka analisis tersebut lebih mudah diselesaikan dengan metode elemen hingga. Dengan metode elemen hingga, solusi nilai eigen yang cukup besar untuk kasus getaran dapat diselesaikan dengan lebih mudah dengan bantuan komputer.

Penelitian bertujuan untuk mengembangkan program komputer yang dijalankan dengan MATLAB untuk menentukan frekuensi pribadi dan modus getar poros rotor berdasarkan metode elemen hingga. Analisis ini hanya dibatasi untuk getaran bebas tanpa redaman yang terjadi pada sistem rotor yang terdiri dari satu poros rotor dan piringan yang terletak pada poros rotor. Dalam hal ini frekuensi pribadi hanya dipengaruhi oleh kekakuan dan massa dari sistem yang dianalisis.

### 2. Tinjauan Pustaka

Persamaan gerak poros rotor dan piringannya diperoleh dari energi kinetik dan energi potensial yang bekerja. *Piringan* diasumsikan kaku sehingga karakteristik dinamikanya hanya dipengaruhi oleh energi kinetik yang bekerja. Setiap nodal pada poros rotor memiliki empat derajat kebebasan yaitu perpindahan translasi  $u$  dan  $w$  serta perpindahan sudut  $\theta$  dan  $\psi$ . Jika *piringan* terletak pada nodal, maka vektor perpindahan nodal  $\delta$  pada pusat rotor adalah:

$$\delta = [u, w, \theta, \psi] \quad (1)$$

Sedangkan energi kinetik yang terjadi pada *piringan* adalah:

$$T_D = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (2)$$

Untuk pemodelan elemen hingga, persamaan Lagrange diterapkan pada persamaan tersebut sehingga diperoleh matrik inersia *piringan*, yaitu:

$$M_D = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dx} \end{bmatrix} \quad (3)$$

dimana  $m_d$  adalah massa *piringan* dan  $I_{dx}$  adalah momen inersia *piringan* dalam arah X.

Poros rotor dimodelkan sebagai batang lentur dengan potongan seragam. Setiap elemen terdiri dari dua nodal dengan empat perpindahan translasi dan empat perpindahan rotasi. Vektor perpindahan nodal pada poros rotor adalah:

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2] \quad (4)$$

Energi kinetik yang terjadi pada poros rotor adalah:

$$T = \frac{1}{2} \delta \dot{u} \cdot M_1 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w} \cdot M_2 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{\theta} \cdot M_3 \delta \dot{\theta} + \frac{1}{2} \delta \dot{\psi} \cdot M_4 \delta \dot{\psi} + \Omega \delta \dot{u} \cdot M_5 \delta \dot{w} + \rho I L \Omega^2 \quad (5)$$

Penerapan persamaan Lagrange pada persamaan tersebut, maka diperoleh matrik inersia massa dan matrik inersia rotasi poros rotor ], yaitu:

$$M_C = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$M_S = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

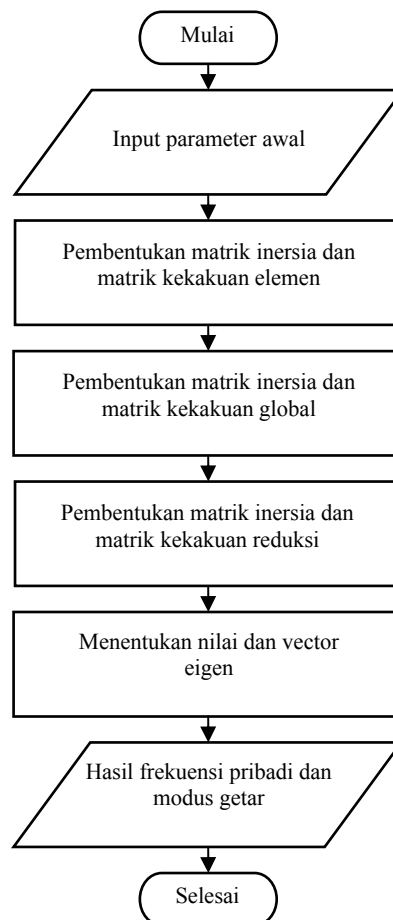
Matrik kekakuan poros rotor adalah:

$$K = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Dalam hal ini  $\rho$  adalah massa per unit volume,  $L$  adalah panjang elemen poros rotor,  $S$  adalah luas penampang poros rotor,  $I$  adalah momen inersia penampang poros rotor terhadap sumbu netral dan  $a$  adalah pengaruh geser.

### 3. Langkah-langkah Analisis

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menentukan frekuensi pribadi dan modus getar poros rotor dapat dilihat pada diagram alir berikut:



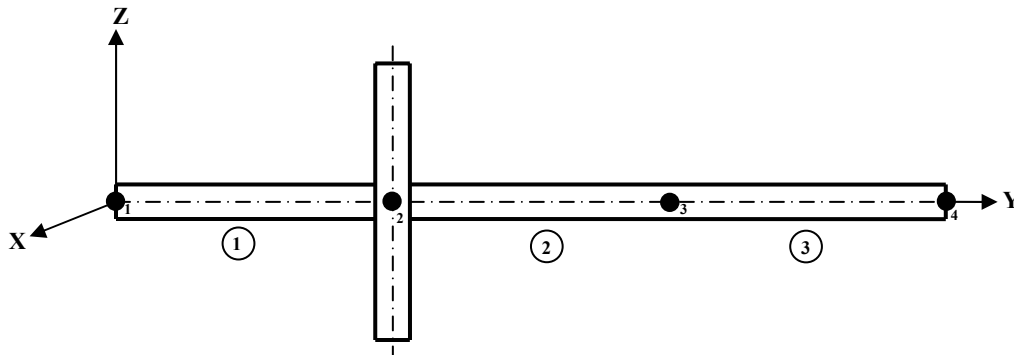
Gambar 1. Diagram alir program.

#### 4. Pemodelan Elemen Hingga

Kasus yang dianalisis adalah poros dengan satu piringan yang terletak pada jarak 0,13 m dari ujung poros. Adapun data-data poros rotor dan piringan adalah:

1. Massa jenis poros rotor ( $\rho_p$ ) = 7800 kg/m<sup>3</sup>
2. Modulus elastisitas poros rotor ( $E_p$ ) = 2 x 10<sup>11</sup> N/m<sup>2</sup>
3. Panjang poros rotor ( $L_p$ ) = 0,4 m
4. Diameter poros rotor ( $d_p$ ) = 0,02 m
5. Poisson ratio ( $\nu$ ) = 0,3
6. Diameter dalam piringan ( $d_1$ ) = 0,02 m
7. Diameter luar piringan ( $d_2$ ) = 0,3 m
8. Tebal piringan ( $h$ ) = 0,03 m
9. Massa jenis piringan ( $\rho_d$ ) = 7800 kg/m<sup>3</sup>

Poros dimodelkan menjadi tiga elemen garis yang sama panjang dengan kondisi batas  $u_1 = w_1 = u_4 = w_4 = 0$ .



Gambar 2. Pemodelan elemen hingga.

#### 4. Hasil dan Pembahasan

Analisis getaran dengan metode elemen hingga ini meliputi penyusunan matrik elemen dari piringan dan poros rotor yang diperoleh dari persamaan (3), (6), (7) dan (8). Matrik-matrik ini diglobalkan dan direduksi dengan memasukkan kondisi batasnya. Nilai eigen dan vektor eigen diperoleh dengan mensubstitusikan matrik-matrik global tereduksi tersebut ke persamaan gerak sistem:

$$M\ddot{\delta} + K\delta = 0$$

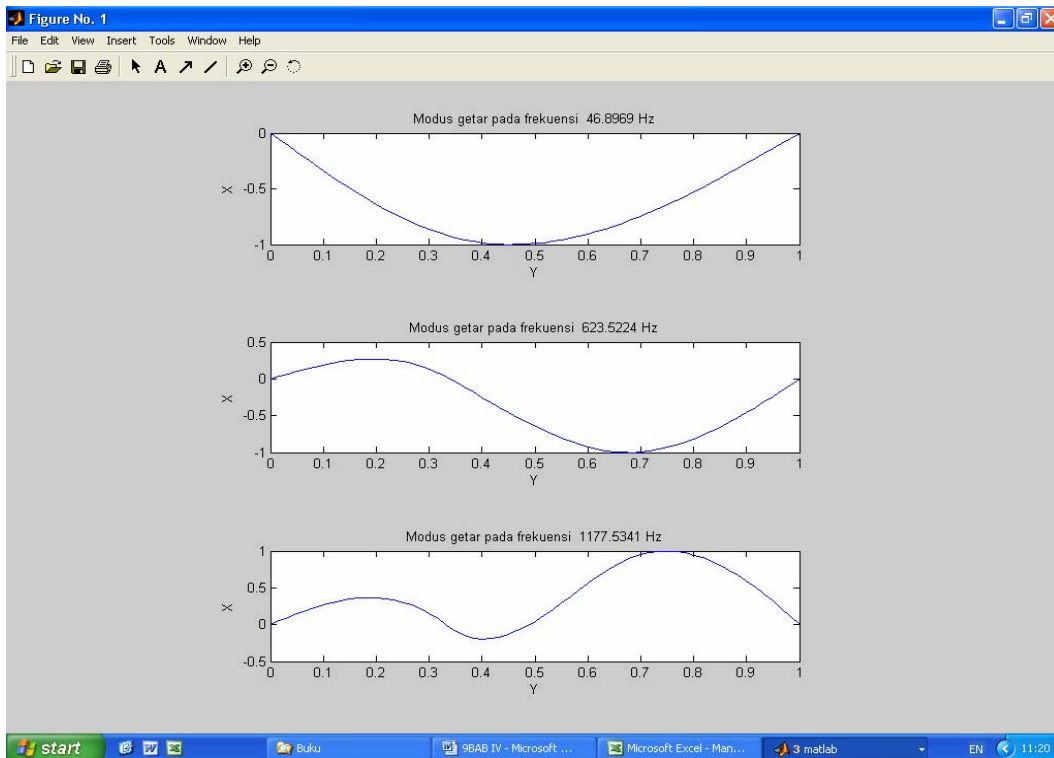
Dari hasil analisis program diperoleh 6 frekuensi pribadi yang berbeda, yaitu:

- $f_{n1} = 46,8969$  Hz
- $f_{n2} = 623,5224$  Hz
- $f_{n3} = 1177,5341$  Hz
- $f_{n4} = 3309,5457$  Hz
- $f_{n5} = 4651,8427$  Hz
- $f_{n6} = 8484,8323$  Hz

Fungsi modus getar sistem dapat ditentukan melalui persamaan:

$$U = \sum_{i=1}^n N(y) \cdot \delta$$

Dengan mensubstitusikan vektor eigen ( $v$ ) ke dalam koordinat global, diperoleh vektor perpindahan nodal ( $\delta$ ) sistem sehingga diperoleh modus getar sistem ( $U$ ). Berikut adalah 3 modus getar hasil analisis program:



Gambar 3. Frekuensi pribadi dan modus getar hasil simulasi program.

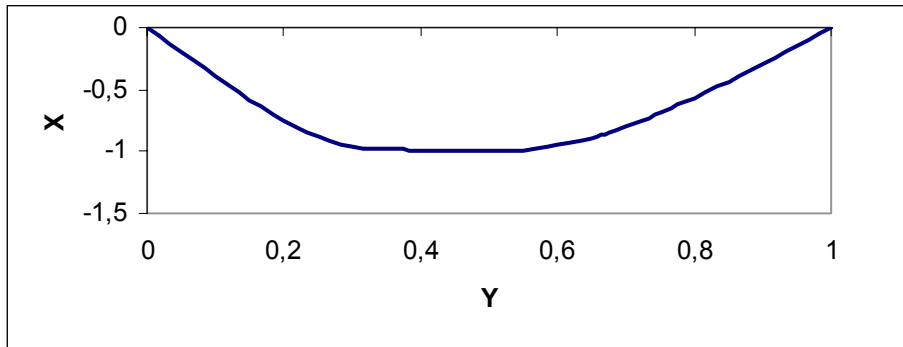
Untuk validasi hasil simulasi program, model yang sama juga diselesaikan secara manual menggunakan persamaan energi. Berikut frekuensi pribadi dan modus getar yang diperoleh:

Tabel 1. Hasil perhitungan nilai eigen dan frekuensi pribadi

No	$\lambda$	$\omega_n$ (rad/s)	$f_n$ (Hz)
1	86895,50649	294,7804378	46,89688783
2	15360782,65	3919,283435	623,5223647
3	54784321,51	7401,643163	1177,53414
4	432758943,8	20802,85903	3309,545755
5	854986572,6	29240,15343	4651,842591
6	2844432900	53333,22511	8484,831267

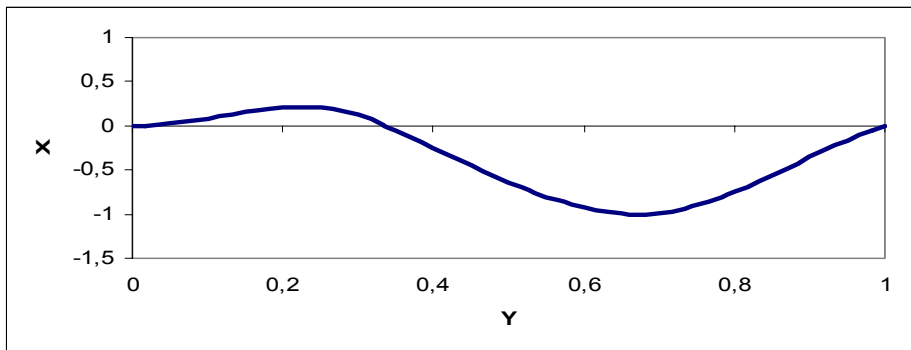
Sumber: Hasil analisis

1. Pada frekuensi pribadi ( $f_{n1}$ ) 46,8969 Hz



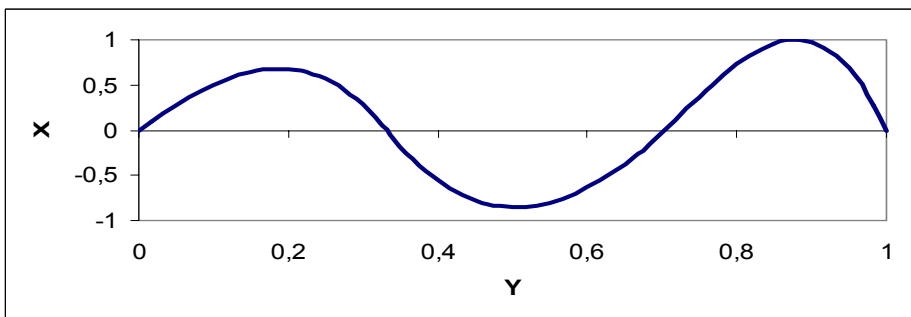
Gambar 4. Grafik modus getar ( $U_1$ ) poros rotor hasil analisis manual.

2. Pada frekuensi pribadi ( $f_{n2}$ ) 623,5224 Hz



Gambar 5. Grafik modus getar ( $U_2$ ) poros rotor hasil analisis manual.

3. Pada frekuensi pribadi ( $f_{n3}$ ) 1177,5341 Hz



Gambar 6. Grafik modus getar ( $U_3$ ) poros rotor hasil analisis manual.

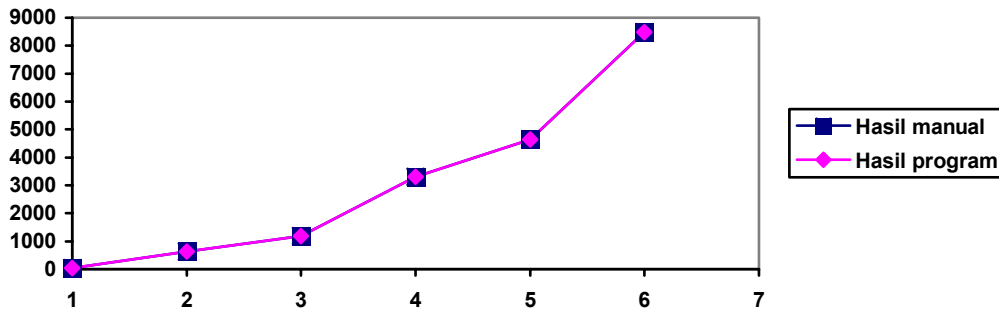
Untuk melihat seberapa besar penyimpangan yang terjadi, frekuensi pribadi hasil simulasi program dibandingkan hasil perhitungan secara manual. Secara umum hasil yang diperoleh dari program sama dengan hasil analisis secara manual. Persentase kesalahan frekuensi pribadi hasil analisis program terhadap hasil analisis manual dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 2. Persentase kesalahan hasil

No	$f_n$ manual (Hz)	$f_n$ program (Hz)	Persentase kesalahan (%)
1	46,8969	46,8969	0,0
2	623,5224	623,5224	0,0
3	1177,5341	1177,5341	0,0
4	3309,5458	3309,5457	0,00000302
5	4651,8426	4651,8427	0,00000215
6	8484,8313	8484,8323	0,00001179

Sumber: Hasil analisis

Berikut perbandingan kedua hasil dalam bentuk grafik:



Gambar 7. Grafik perbandingan frekuensi pribadi hasil analisis manual dengan hasil analisis program

Dari hasil perbandingan dapat dilihat bahwa hasil analisis program mendekati hasil analisis manual. Persentase kesalahan hasil analisis program terhadap hasil analisis manual sangat kecil. Dengan demikian program ini cukup memuaskan dan dapat digunakan untuk menganalisis frekuensi pribadi poros rotor beserta modus getarnya.

## 5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari pengkajian ini dapat disimpulkan bahwa program ini cukup efektif digunakan untuk menentukan frekuensi pribadi dan modus getar poros rotor. Penggunaan MATLAB dengan fitur-fitur perhitungannya terutama untuk solusi nilai eigen dan vektor eigen sangat mendukung, sehingga program menjadi lebih efektif dan sederhana.

## 6. Daftar Pustaka

1. Hanselman. D, dan Littlefield. B, “*MATLAB*”, Penerbit ANDI, Yogyakarta, 2002.
2. Harsokoesoemo. D, dan Brojonegoro. SS, “*Metode Elemen Hingga*”, Jurusan Teknik Mesin ITB, Bandung, 1991.
3. Lelanne. M, dan Ferraris. G, “*Rotordynamics Prediction in Engineering*”, John Wiley and Sons, England, 1990.
4. Meirovitch. L, “*Fundamentals of Vibrations*”, McGraw-Hill, Inc., New York, 2001.