

PENGEMBANGAN MODEL MATEMATIKA GETARAN PADA POROS MULTI ROTOR DIBAWAH PENGARUH EFEK GIROSKOPIK

Yan Tondok

Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik Universitas Sam Ratulangi

Kampus Unsrat Bahu Manado 95115

E-mail : yhandto@yahoo.com

Abstrak

Poros dan rotor merupakan bagian dari mekanisme suatu mesin dan getaran sebagian besar berasal dari elemen ini, baik secara langsung maupun tidak. Dalam perencanaan mekanisme suatu mesin perlu dipertimbangkan pengaruh keterkaitan setiap elemen yang menimbulkan constraint, sehingga hasil rancangan/desain diperoleh dari proses optimasi. Oleh sebab itu maka persamaan kinetika dari setiap elemen sebaiknya continuous form.

*Penelitian ini mencari hubungan frekuensi natural dari poros tanpa rotor dengan frekuensi natural poros berotor. Frekuensi natural dengan “metode transformasi matriks” dicari dengan membuat formulasi matematika berdasarkan *mechanic of material* dan getaran bebas (*free vibrations*). Dari hasil perhitungan kemudian dengan pendekatan polinomial dibuat persamaan baru dalam bentuk persamaan matematika $\omega_{n,R} = \varphi(Z_R D_R B_R E_R \rho_R N_R)\omega_{n,P}$.*

Dari hasil perhitungan diperoleh frekuensi natural dengan menyertakan efek giroskopik menghasilkan kenaikan frekuensi natural sebesar 0.7% - 4.1% untuk satu rotor, 1.79 - 9.36 % untuk dua rotor dan 2.43 % - 4.46 % terhadap euler beam dan lebih mendekati hasil eksperimentasi. Perubahan variabel posisi pada tiap rotor menghasilkan pola kuadratik yang simetris pada frekuensi natural. Kesalahan signifikan yang terjadi dengan perhitungan metode polinomial kuadratik pada dua dan tiga rotor merupakan akumulasi dari variabel posisi (Z) untuk tiap rotor

Kata kunci : getaran multi rotor , whirling rotation, efek giroskopik, konstanta gelombang, frekuensi natural multi rotor

I. Pendahuluan

Getaran merupakan suatu fenomena yang tidak dapat dihindari pada mesin, baik yang berotasi maupun bolak-balik. Getaran akan terjadi baik pada mesin yang seimbang (*balance*) maupun tak seimbang (*unbalance*). Setiap material mempunyai fleksibilitas tertentu, apabila diberi beban akan terjadi defleksi. Poros yang telah mengalami defleksi apabila diputar akan menghasilkan gaya sentrifugal terhadap sumbu bantalan yang mengakibatkan terjadinya getaran lateral.

Getaran lateral dan kecepatan kritis pada poros berotasi merupakan suatu masalah yang telah banyak dibahas oleh ahli getaran, dan sampai saat ini masih merupakan permasalahan pada disain dan perawatan permesinan. Poros yang berotasi dengan kecepatan yang sama dengan frekuensi naturalnya, akan menyebabkan resonansi, dimana amplitudo getaran yang dihasilkan akan sangat besar. Kecepatan poros saat terjadi resonansi disebut kecepatan kritis [Rankine,1869].

Pada penelitian ini akan dicari frekuensi natural dari suatu poros tanpa rotor dan dengan rotor dengan membuat formulasi matematika dan eksperimentasi. Pada model formulasi matematika poros dan rotor dimodelkan sebagai *continuous system* dengan tumpuan sederhana (*simple - simple support*). Sehingga akan

didapatkan beberapa frekuensi natural yang merupakan ciri khas *continuous system*.

Penelitian ini mencari hubungan frekuensi natural dari poros tanpa rotor dengan frekuensi natural poros berotor. Frekuensi natural dengan “metode transformasi matriks” dicari dengan membuat “formulasi matematika” berdasarkan *mechanic of material* dan *getaran bebas (free vibrations)*. Poros dengan bearing di modelkan sebagai beam dengan tumpuan sederhana. Getaran pada poros berdasarkan pada metode “*Euler - Bernoulli*” ditambah dengan adanya efek giroskopik, sebagai akibat *whirling* frekuensi. Dengan penambahan efek giroskopik, maka konstanta gelombang akan mengalami perubahan. Berdasarkan hasil perhitungan dengan metode transformasi matriks untuk satu rotor, kemudian disusun persamaan baru dalam bentuk polinomial

$$\omega_{n,R} = \varphi(Z_R D_R B_R E_R \rho_R N_R)\omega_{n,P},$$

dimana φ merupakan konstanta pengali rotor yang tergantung pada posisi rotor (Z_R), dimensi poros/rotor (D_R, B_R), modulus elastisitas rotor (E_R), massa jenis rotor (ρ_R), jumlah rotor (N_R).

Eksperimentasi dilakukan baik tanpa rotor maupun dengan rotor. Pada poros tanpa rotor pengujian dilakukan sampai diperoleh beberapa frekuensi natural. Pengujian poros berotor dilakukan dengan variasi jumlah dan

posisi rotor. Hasil perhitungan metode transformasi matriks, metode polinomial dan hasil eksperimentasi kemudian dibandingkan.

2. Kajian Pustaka Dan Pengembangan Teori

Getaran yang terjadi pada poros yang berotasi tidaklah mungkin dapat dihilangkan, yang dapat kita lakukan meminimalkan sampai batas yang aman agar tidak merusak. Apabila poros berotasi, maka frekuensi natural akan menjadi rintangan-rintangan yang harus dilalui tetapi harus dihindari sebagai frekuensi kerja. Apabila frekuensi operasi sama dengan natural poros, maka akan terjadi resonansi. Pada saat resonansi terjadi, defleksi yang terjadi pada poros akan sangat besar sehingga poros akan patah apabila melampaui batas kekuatan yang diijinkan.

R.K.Singal, L. Williams dan H. Wang [1991] meneliti pengaruh tebal radial disk terhadap getaran bebasnya. Disk yang digunakan adalah disk tipis, tebal dan disk pejal. Diperoleh kesimpulan semakin besar perbandingan tebal radial terhadap radius rata-rata, maka frekuensi respon juga akan semakin besar.

L. Meirovitch [1997] meneliti pengaruh putaran poros fleksibel dengan menggunakan prinsip giroskopik. Chon-Won Lee, Sang-Bok Chun [1998] membuat formulasi matematika getaran rotor dengan *multi fleksibel disk*. Dari contoh perhitungan numerik diketahui frekuensi natural berbanding lurus dengan kecepatan angular, dimana frekuensi natural untuk *rigid disk* lebih besar dari *disk fleksibel*.

Pada penelitian ini posisi, dimensi dan jumlah rotor, dirumuskan sebagai konstanta pengali rotor. Frekuensi natural dicari dengan metode transformasi matriks. Berdasarkan perhitungan tersebut dicari model matematika polinomial dengan bantuan perangkat lunak Matlab 8, versi 7.3. Kedua hasil tersebut lalu dibandingkan dengan hasil eksperimentasi.

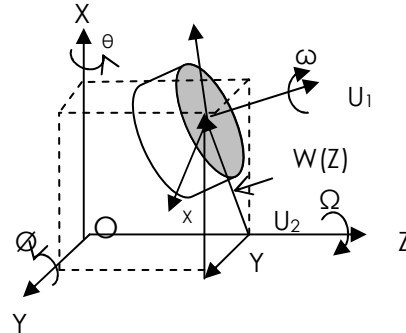
Dengan model polinomial matematika diatas dapat digunakan dalam optimasi perancangan mesin yang menggunakan multi rotor sebagai salah satu parameter.

2.1. Dinamika Poros dan Rotor

Saat Rotor berputar dengan kecepatan sudut ω (rad/sec), akan terjadi defleksi terhadap sumbu bantalan sehingga terjadi *whirling* sebesar Ω (rad/sec). Defleksi pada poros akan mengakibatkan perubahan sumbu putar sepanjang elemen poros setiap saat. Perubahan

sumbu putar tersebut akan menimbulkan *momen* dan *inertia rotasi* yang disebut *giroskopik efek*.

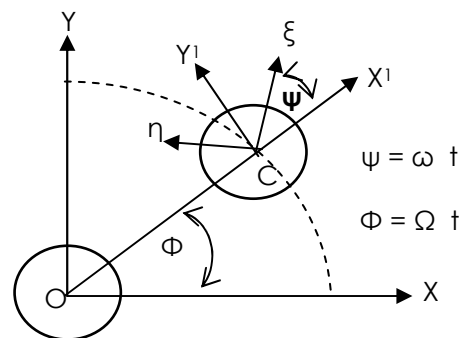
Pada gambar 1 sebuah elemen rotor sepanjang dz pada bidang XYZ. Sumbu putar poros (U_1) akan mengalami perubahan arah setiap saat, hal ini terjadi karena poros telah mengalami defleksi.



Gambar 2.1. Kinematika rotor pada ruang

Putaran poros dengan sumbu U_2 disebut *whirling*. Perubahan sumbu putar ini akan menghasilkan putaran sebesar Ω dan θ pada sumbu Y dan X. Sumbu putar U_1 merupakan fungsi sumbu aksial poros. Dari persamaan (1) diperoleh :

$$\bar{U}_1 = [T_{21} \ T_{22} \ T_{23} \ T_{24}] [w_{(x-1)} \ \theta_{(x-1)} \ M_{(x-1)} \ V_{(x-1)}]^T \quad (1)$$



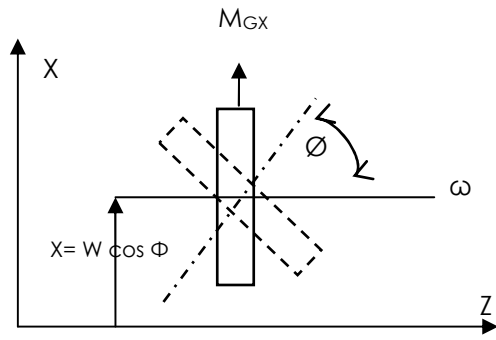
Gambar 2. rotor pada bidang XY

Perpindahan posisi poros dari titik O ke C diakibatkan oleh :

1. defleksi pada poros sebesar $W = W(Z)$
2. putaran poros (ω) terhadap sumbu U_1
whirling (Ω) terhadap sumbu U_2

dari gambar 3a, *slope* yang terjadi akibat putaran pada sumbu Y:

$$\phi = \frac{\partial X(Z)}{\partial Z} \quad (2)$$



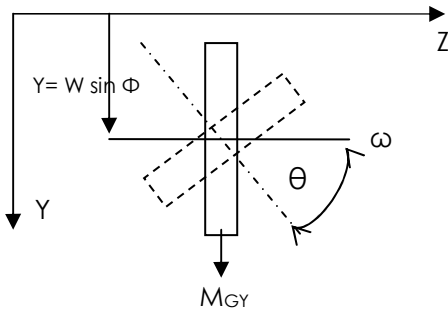
Gambar 3a. Proyeksi rotor pada bidang XZ

Momen giroskopik (M_{GX}) dan inersia rotasi (M_{IX}) yang timbul :

$$M_{GX} = \rho I_p \omega \frac{\partial^2 X}{\partial Z \partial t} dZ \quad (N.m)$$

$$M_{IX} = -\rho I \frac{\partial^3 X}{\partial Z \partial t^2} dZ \quad (N.m) \quad (3)$$

Pada rotor tanpa *unbalance mass*, $\Omega = \omega$



Gambar 3b. Proyeksi rotor pada bidang YZ

dari gambar 3b, *slope* yang terjadi akibat putaran pada sumbu X:

$$\theta = \frac{\partial Y(Z)}{\partial Z} \quad (4)$$

Momen giroskopik (M_{GY}) dan *inertia rotation* (M_{IX}) yang timbul :

$$M_{GY} = \rho I_p \omega \frac{\partial^2 Y}{\partial Z \partial t} dZ \quad (N.m)$$

$$M_{IX} = -\rho I \frac{\partial^3 Y}{\partial Z \partial t^2} dZ \quad (N.m) \quad (5)$$

Total Momen akibat efek giroskopik (M^*):

$$M_X^* = \rho I_p \omega \frac{\partial^2 X}{\partial Z \partial t} dZ - \rho I \frac{\partial^3 X}{\partial Z \partial t^2} dZ$$

$$M_Y^* = \rho I_p \omega \frac{\partial^2 Y}{\partial Z \partial t} dZ + \rho I \frac{\partial^3 X}{\partial Z \partial t^2} dZ \quad (6)$$

Dengan adanya efek giroskopik, maka persamaan keseimbangan :

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial Z^4} + \rho A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \rho I \omega \frac{\partial^4 Y}{\partial Z^2 \partial t^2} = 0 \quad (7a)$$

$$EI \frac{\partial^4 X}{\partial Z^4} + \rho A \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \rho I \omega \frac{\partial^4 X}{\partial Z^2 \partial t^2} = 0 \quad (7b)$$

2.2. Frekuensi Natural dengan Metode Transformasi Matriks

Persamaan konstanta gelombang (k_{GE}) pada efek giroskopik adalah sebagai berikut

$$k_{GE} = \left\{ k_{EB} \left[1 - \left(d\omega \frac{\pi n}{L} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{4}} \quad (8)$$

Untuk memperoleh Frekuensi natural pada poros dengan rotor dibawah pengaruh efek giroskopik, maka konstanta gelombang (8) digunakan pada tiap elemen transformasi matriks.

$$\{Y\}^R = [T_P]^m \cdot [T_R]^{m-1} \cdot [T_P]^{m-2} \cdot [T_R]^{m-3} \dots [T_P]^1 \{Y\}^L$$

$$\text{atau} \quad \{Y\}^R = [T]^{Total} \{Y\}^L \quad (9)$$

Dengan memasukkan kondisi batas pada persamaan (9), maka akan diperoleh persamaan

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^R = \begin{bmatrix} T_{12}(\omega) & T_{14}(\omega) \\ T_{32}(\omega) & T_{34}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ V \end{Bmatrix}^L \quad (10)$$

Dengan menyelesaikan persamaan diatas, maka akan diperoleh frekuensi natural poros dengan rotor dibawah pengaruh efek giroskopik .

$$(T_{12}(\omega) \cdot T_{34}(\omega) - T_{14}(\omega) \cdot T_{32}(\omega)) = 0 \quad (11)$$

3. Konstanta Pengali Rotor

Persamaan ini dibangun dari hasil perhitungan metode transformasi matriks untuk satu rotor dengan variasi dimensi dan posisi rotor. Dari persamaan polinomial akan diperoleh konstanta pengali rotor, sehingga perhitungan untuk kombinasi rotor akan mudah dilakukan.

$$\omega_{n,R} = \varphi(Z_R, D_R, B_R, E_R, \rho_R, N_R) \omega_{n,P} \quad \text{atau}$$

$$\omega_{n,R} = \varphi(\mathfrak{R}_R, Z_R, B_R, N) \omega_{n,P} \quad (12)$$

$$\text{dimana : } \mathfrak{R}_R = \left[\frac{1 - \left(\frac{dr \pi m}{L} \right)^2}{E_r / \rho_r \cdot dr^2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad \text{kons tan ta dimensi rotor}$$

dr =jari-jari girasi rotor;

dp =jari-jari girasi poros

$\omega_{n,R}$ = frekuensi natural poros dengan rotor (rad/sec)

$\omega_{n,P}$ = frekuensi natural poros tanpa rotor (rad/sec)

$\varphi(\mathfrak{R}_R, Z_R, B_R, N)$ = konstanta pengali rotor

Z_R = posisi rotor (mm) ;

D_R = lebar rotor (mm)

B_R = diameter rotor (mm) ;

E_R = modulus elastisitas rotor (kg/mm²)

ρ_R = massa jenis rotor (kg/mm³) ;

N_R =jumlah rotor

Dari hasil perhitungan dari persamaan (11) dengan berbagai posisi (Z_R), lebar rotor (B) dan nilai konstanta dimensi rotor \mathfrak{R}_r , seperti tercantum pada lampiran, maka dirumuskan faktor konstanta rotor sebagai fungsi posisi dan dimensi rotor.

$$F(Z_R, B, \mathfrak{R}_r) = \frac{\omega_{n,R}(Z_R, B, \mathfrak{R}_r)}{\omega_{n,P}} \quad (13)$$

Oleh karena konstanta pengali rotor tidak berdimensi, maka variabel posisi, lebar dan dimensi rotor dinyatakan sebagai perbandingan terhadap panjang dan konstanta dimensi poros

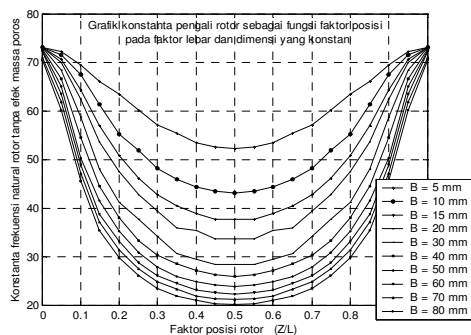
$$\hat{Z} = \frac{Z_R}{L_p}; \quad \hat{B} = \frac{B}{L}; \quad \hat{\mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{R}_r}{\mathfrak{R}_p} \quad (14)$$

dimana \mathfrak{R}_p = konstanta dimensi poros

$$\mathfrak{R}_p = \left[\frac{1 - \left(\frac{dp}{L} \right)^2}{\frac{E_p}{\rho_p} dp^2} \right]^{1/4}$$

3.1. Analisa konstanta rotor sebagai fungsi posisi (\hat{Z}_R), pada faktor lebar rotor (\hat{B}) dan konstanta dimensi rotor $\hat{\mathfrak{R}}$ yang konstan

Untuk memperoleh model matematis untuk setiap variabel diatas, maka terlebih dahulu dibuat *scatter diagram* berdasarkan lampiran untuk setiap perubahan variabel posisi \hat{Z}_R pada faktor lebar \hat{B} dan konstanta dimensi rotor $\hat{\mathfrak{R}}$ yang konstan.



Grafik 4. Hubungan faktor posisi rotor terhadap konstanta Frekuensi natural pada faktor lebar dan dimensi yang konstan

Dari gambar 4 diatas diperoleh persamaan faktor konstanta rotor sebagai fungsi \hat{Z}_R :

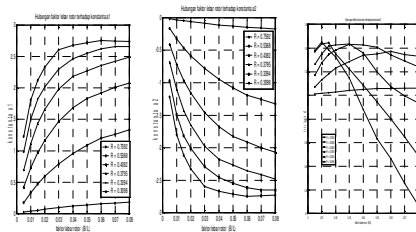
$$f_{\hat{\mathfrak{R}}\hat{B}}^i(\hat{Z}) = a_1^i \hat{Z}^2 + a_2^i \hat{Z} + a_3^i \quad (15)$$

Konstanta a_1 , a_2 dan a_3 pada persamaan (15) merupakan fungsi dari konstanta faktor lebar (\hat{B}) dan dimensi rotor ($\hat{\mathfrak{R}}$). Dari persamaan diatas dapat dirumuskan hubungan antara faktor konstanta rotor $f_{\hat{\mathfrak{R}}\hat{B}}^i$ dan faktor konstanta lebar rotor (\hat{B})

$$\varphi_{\hat{\mathfrak{R}}\hat{B}}(\hat{Z}) = a_1(\hat{B}) \hat{Z}^2 + a_2(\hat{B}) \hat{Z} + a_3(\hat{B}) \quad (16)$$

3.2. Analisa konstanta rotor sebagai fungsi posisi (Z_R) dan faktor lebar rotor (\hat{B}), pada konstanta dimensi rotor $\hat{\mathfrak{R}}$ yang konstan

Nilai konstanta a_1 , a_2 dan a_3 sebagai fungsi faktor lebar (\hat{B}), diperoleh dengan terlebih dahulu membuat *scatter diagram*.



Grafik 5. Hubungan faktor lebar rotor terhadap konstanta a1 dan a2 pada nilai konstanta dimensi rotor yang konstan.

Dari gambar 5 diperoleh persamaan

$$a_1^i(\hat{B}) = \left(b_1^i \hat{B}^2 + b_2^i \hat{B} + b_3^i \right); \quad a_2^i(\hat{B}) = \left(b_4^i \hat{B}^2 + b_5^i \hat{B} + b_6^i \right); \quad (17)$$

$$a_3^i(\hat{B}) = \left(b_7^i \hat{B}^2 + b_8^i \hat{B} + b_9^i \right)$$

Dengan bantuan *scatter diagram* akan diperoleh hubungan a_1 , a_2 dan a_3 sebagai fungsi faktor diameter rotor (\hat{B})

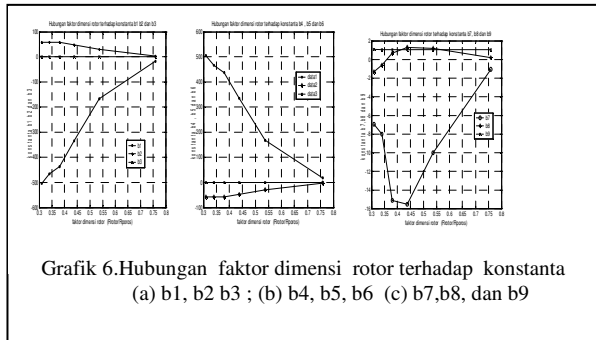
$$\varphi_{\hat{\mathfrak{R}}\hat{B}}(\hat{Z}) = \left(b_1 \hat{B}^2 + b_2 \hat{B} + b_3 \right) \hat{Z}^2 + \left(b_4 \hat{B}^2 + b_5 \hat{B} + b_6 \right) \hat{Z} + \left(b_7 \hat{B}^2 + b_8 \hat{B} + b_9 \right) \quad (18)$$

3.3. Analisa konstanta rotor sebagai fungsi posisi (Z_R) dan faktor lebar rotor (\hat{B}), dan konstanta dimensi rotor $\hat{\mathfrak{R}}$

Konstanta b_1 , b_2 , b_3 , b_4 , b_5 , b_6 , b_7 , b_8 dan b_9 pada persamaan (26) merupakan fungsi dari konstanta faktor dimensi rotor ($\hat{\mathfrak{R}}$)

Dari *scatter diagram* diatas (gambar 6) diperoleh hubungan antara b_l dan faktor dimensi rotor ($\hat{\mathfrak{R}}$)

$$b_l^i(\hat{\mathfrak{R}}) = \left(C_1^i(\hat{\mathfrak{R}})^2 + C_2^i(\hat{\mathfrak{R}}) + C_3^i \right) \quad (19)$$



nilai b_l pada berbagai nilai faktor dimensi rotor ($\hat{\mathfrak{R}}$)

$$\begin{aligned} b_1^1(\hat{\mathfrak{R}} = \hat{\mathfrak{R}}_1) &= \left(C_1^1(\hat{\mathfrak{R}}_1)^2 + C_2^1(\hat{\mathfrak{R}}_1) + C_3^1 \right) \\ b_1^2(\hat{\mathfrak{R}} = \hat{\mathfrak{R}}_2) &= \left(C_1^2(\hat{\mathfrak{R}}_2)^2 + C_2^2(\hat{\mathfrak{R}}_2) + C_3^2 \right) \\ b_1^3(\hat{\mathfrak{R}} = \hat{\mathfrak{R}}_3) &= \left(C_1^3(\hat{\mathfrak{R}}_3)^2 + C_2^3(\hat{\mathfrak{R}}_3) + C_3^3 \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Sehingga persamaan umum konstanta pengali rotor:

$$\begin{aligned} \varphi(\hat{Z}\hat{B}\hat{\mathfrak{R}}) &= \left(b_1\hat{B}^2 + b_2\hat{B} + b_3 \right) \hat{Z}^2 + \left(b_4\hat{B}^2 + b_5\hat{B} + b_6 \right) \hat{Z} \\ &+ \left(b_7\hat{B}^4 + b_8\hat{B}^3 + b_9 \right) \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} \varphi(\hat{Z}\hat{B}\hat{\mathfrak{R}}) &= \{ (-1397.5\hat{\mathfrak{R}}^2 + 2627.0\hat{\mathfrak{R}} - 1202.2)\hat{B}^2 \\ &+ (-38.587\hat{\mathfrak{R}}^2 - 88.598\hat{\mathfrak{R}} + 92.307)\hat{B} \\ &+ 12.173\hat{\mathfrak{R}}^2 - 15.529\hat{\mathfrak{R}} + 4.7914\} (\hat{Z} - \hat{Z}) \\ &+ (176.73\hat{\mathfrak{R}}^2 - 171.83\hat{\mathfrak{R}} + 28.077)\hat{B}^2 \\ &+ (-42.519\hat{\mathfrak{R}}^2 + 48.077\hat{\mathfrak{R}} - 11.917)\hat{B} \\ &+ 0.54934\hat{\mathfrak{R}}^2 - 0.71121\hat{\mathfrak{R}} + 1.2239 \end{aligned} \quad (21)$$

Persamaan (21) merupakan *konstanta pengali rotor* untuk satu buah rotor dimana nilai konstanta $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8$ dan b_9 sesuai dengan persamaan (20).

Sehingga diperoleh persamaan frekuensi natural untuk poros dengan N buah Rotor

$$\omega_{n,R}(\hat{Z}\hat{B}\hat{\mathfrak{R}}) = \left\{ \frac{\left(\omega_{N-1,n,R} * \varphi_N(\hat{Z}\hat{B}\hat{\mathfrak{R}}) \right)}{\left(\omega_{N-1,n,R}^2 + \varphi_N(\hat{Z}\hat{B}\hat{\mathfrak{R}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right\} * \omega_{N-1,n,R} \quad (22)$$

dimana

$$\begin{aligned} \omega_{N-1,n,R}(\hat{Z}\hat{B}\hat{\mathfrak{R}}) &= \left\{ \frac{\left(\omega_{N-2,n,R} * \varphi_{N-1}(\hat{Z}\hat{B}\hat{\mathfrak{R}}) \right)}{\left(\omega_{N-2,n,R}^2 + \varphi_{N-1}(\hat{Z}\hat{B}\hat{\mathfrak{R}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right\} * \omega_{N-2,n,R} \\ \omega_{1,n,R}(\hat{Z}\hat{B}\hat{\mathfrak{R}}) &= \left\{ \frac{\left(\omega_{n,P} * \varphi_1(\hat{Z}\hat{B}\hat{\mathfrak{R}}) \right)}{\left(\omega_{n,P}^2 + \varphi_1(\hat{Z}\hat{B}\hat{\mathfrak{R}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right\} * \omega_{n,P} \end{aligned}$$

4. Eksperimentasi

Metodologi penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah pendekatan teoritis dan eksperimentasi. Pendekatan teoritis dilakukan dengan menyusun formulasi matematik bending vibrations, dengan variasi radius penampang. Hasil yang diperoleh dari pemodelan matematika divalidasi dengan hasil eksperimentasi.

Eksperimentasi dilakukan terhadap poros tanpa rotor dan poros dengan rotor dengan variasi dimensi, posisi dan jumlah rotor.

Frekuensi natural poros/rotor dan *whirling* (Ω) diukur dengan menggunakan *stroboscope*. Frekuensi natural diukur pada titik dekat bantalan pada arah radial, hal ini dilakukan karena pada titik tersebut defleksi yang terjadi mendekati nol, sedangkan frekuensi *whirling* diukur pada titik dimana terjadi defleksi terbesar dengan arah aksial.

5. Hasil perhitungan

Pada bagian ini akan dilakukan contoh perhitungan berdasarkan metode transformasi matriks, metode polynomial dan perbandingannya dalam bentuk tabel Perhitungan dilakukan terhadap poros dengan satu rotor, dua rotor, dan tiga rotor. Adapun hasil selengkapnya dapat dilihat pada lampiran.

6. Kesimpulan dan saran

6.1. Kesimpulan

1. Perhitungan frekuensi natural dengan menyertakan efek giroskopik menghasilkan kenaikan frekuensi natural sebesar 0.7% - 4.1% untuk satu rotor, 1.79 - 9.36 % untuk dua rotor dan 2.43 % - 4.46 % terhadap euler-beam
2. Frekuensi natural dengan memperhitungkan efek giroskopik menghasilkan kesalahan yang lebih kecil terhadap hasil eksperimentasi
3. Perubahan variabel posisi pada tiap rotor menghasilkan pola kuadratik yang simetris

- pada frekuensi natural
4. Perubahan lebar dan konstanta dimensi pada posisi rotor yang konstan akan menghasilkan pola eksponensial pada frekuensi natural
 5. Perhitungan frekuensi natural dengan metode polinomial kuadrat akan jauh lebih mudah dilakukan dibandingkan dengan metode transformasi matrik
 6. Kesalahan signifikan yang terjadi dengan perhitungan metode polinomial kuadrat pada dua dan tiga rotor merupakan akumulasi dari variabel posisi untuk tiap rotor
 7. Persamaan polinomial kuadrat yang diperoleh dapat dikembangkan untuk analisis optimasi pada poros dengan multi rotor untuk meminimalkan getaran

6.2.Saran

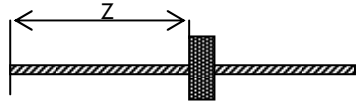
1. Perlu dicari model persamaan baru sehingga menghasilkan tingkat kesalahan yang lebih kecil.
2. Untuk pengembangan analisis frekuensi natural dilakukan dengan memperhatikan efek gaya geser dan *unbalance mass*
3. Persamaan konstanta pengali rotor perlu dikembangkan untuk jenis tumpuan yang lain

Daftar Pustaka

1. Achenbach.J.D. “*Wave propagation in elastic solids*” Elsevier science 1984
2. Frederic F.Ehrich “*Handbook of rotordynamics*” Mc.Graw-Hill,Inc 1992, USA
3. Hansen.Colin H and Snyder S.D. “*Active control of noise and vibrations*” E&FN spon
4. McConnell Kenneth G “*Vibrations testing theory and practice*” John Wiley dan Sons, Inc 1995
5. T.Irie, Gyamada dan S.Aomura “*The steady state response of a rotating damped disk of variable thickness*” Trans.ASME, vol.47,1980 pp.896-900.
6. R.K.Singal K.Williams dan H.wang. “*Effect of radial thickness of the In-Plane free vibrations of circular annular disc*” journal of vibrations and acoustics. Vol.113, 1991 pp 455-460
7. L.Meirovitch “*A separations principle for giroroskopik conservative systems*” Trans.ASME, Vol 119, 1997. pp.110-119
8. Chon-Won Lee, Sang – Bok Chun “*vibrations analysis of rotor with multiple flexible disks using assumed modes method*” Journal of vibrations and acoustics . Vol. 120, 1998 pp 87-94
9. Q.S.Li “*Exact solutions for longitudinal vibrations of multi-step bars with varying cross-section*” Journal of vibration and acoustics.Vol.122,200. pp.183-18

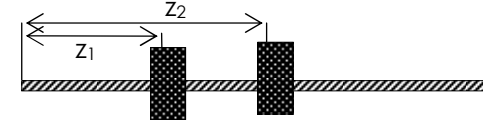
Lampiran

Tabel 1. Perbandingan Metode Analitis dan Eksperimentasi Dengan Tipe Satu Rotor



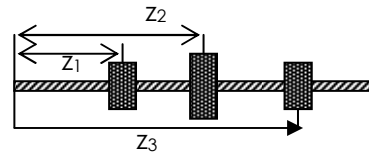
Frekuensi natural untuk satu rotor									
Dia D (mm)	Tebal B (mm)	Posisi Z (mm)	Frekuensi Natural (rad/sec)			Error (%)			
			T.Matriks	Pol	Eks	E ₁	E ₂	E ₃	
50	5	125	71.47	66.72	69.26	6.65	3.09	3.81	
50	5	250	64.08	59.86	63.20	6.58	1.37	5.58	
50	5	500	58.73	54.37	54.82	7.42	6.65	0.83	
50	5	750	64.08	59.86	62.20	6.58	2.93	3.91	
50	5	875	71.47	66.72	69.26	6.65	3.09	3.81	
40	10	125	70.47	66.52	69.44	5.60	1.46	4.39	
40	10	250	62.33	60.00	60.95	3.74	2.21	1.59	
40	10	500	56.13	54.77	53.41	2.41	4.84	2.49	
40	10	750	62.33	60.00	60.95	3.74	2.21	1.59	
40	10	875	70.47	66.52	69.44	5.60	1.46	4.39	
22	15	125	72.17	70.65	71.02	2.11	1.60	0.52	
22	15	250	67.47	67.60	66.60	0.19	1.29	1.47	
22	15	500	65.47	65.15	62.83	0.48	4.03	3.56	
22	15	750	67.47	67.60	66.60	0.19	1.29	1.47	
22	15	875	72.17	70.65	71.02	2.11	1.60	0.52	

Tabel 2. Perbandingan Metode Analitis dan Eksperimentasi Dengan Tipe Dua Rotor



KOMBINASI ROTOR R3 DAN R1											
Frekuensi Natural (rad/sec)			Error (%)			Frekuensi Natural (rad/sec)			Error (%)		
T.Matriks	Pol	Eks	E ₁	E ₂	E ₃	T.Matriks	Pol	Eks	E ₁	E ₂	E ₃
***	***	***	***	***	***	63.43	57.79	62.20	8.90	1.94	7.63
67.88	61.63	63.46	9.21	6.51	2.98	***	***	***	***	***	***
63.14	59.40	56.69	5.93	10.22	4.56	58.91	53.29	55.29	9.55	6.15	3.76
67.88	61.63	63.46	9.21	6.51	2.98	61.43	55.29	57.18	9.99	6.91	3.42
70.00	64.41	64.72	7.98	7.54	0.48	63.43	57.79	62.20	8.90	1.94	7.63
KOMBINASI ROTOR R2 DAN R1											
***	***	***	62.14	54.70	57.81	55.18	49.93	51.84	62.14	54.70	57.81
68.01	60.65	64.09	***	***	***	62.76	54.41	59.06	11.99	6.97	5.69
***	***	***	9.51	6.06	3.82	51.66	44.80	49.01	11.99	6.97	5.69
55.21	49.07	54.06	10.82	5.76	5.68	62.76	60.65	59.06	13.30	5.89	8.54
***	***	***	13.28	5.13	9.40	11.12	2.09	10.17	3.36	5.89	2.62
KOMBINASI ROTOR R2 DAN R3											
65.39	61.45	62.83	63.15	59.22	55.29	65.39	61.45	62.83	69.39	64.22	65.97
***	***	***	62.83	57.92	58.43	6.03	3.91	2.25	***	***	***
6.23	12.45	6.64	60.45	53.41	52.78	6.03	3.91	2.25	59.63	55.42	57.81
7.44	4.92	2.72	62.83	57.92	58.43	7.82	7.01	0.88	***	***	***
11.65	12.69	1.18	7.07	3.06	4.32	7.82	7.01	0.88			

Tabel 3. Perbandingan Metode Analitis dan Eksperimentasi Dengan Tipe Tiga Rotor



KOMBINASI ROTOR R3, R2 DAN R1														
Diameter Rotor			Tebal Rotor			Posisi Rotor			omega (rad/sec)			Perbandingan Error (%)		
D1 (mm)	D2 (mm)	D3 (mm)	B1 (mm)	B2 (mm)	B3 (mm)	Z ₁ (mm)	Z ₂ (mm)	Z ₃ (mm)	Transf. Matriks	Pol	Eks	E ₁	E ₂	E ₃
22	40	50	15	10	5	125	500	750	49.59	43.25	51.00	12.79	2.84	17.92
22	40	50	15	10	5	125	500	875	50.90	48.21	50.89	5.29	0.02	5.56
22	40	50	15	10	5	250	500	750	46.28	41.38	46.50	10.59	0.47	12.38
22	40	50	15	10	5	250	500	875	46.28	46.12	46.24	0.35	0.09	0.26
KOMBINASI ROTOR R3 R2 DAN R1														
50	22	40	5	15	10	125	500	750	53.52	48.69	52.15	9.02	2.57	7.10
50	22	40	5	15	10	125	500	875	56.14	53.99	56.55	3.84	0.72	4.74
50	22	40	5	15	10	250	500	750	48.28	43.68	50.27	9.52	4.12	15.08
50	22	40	5	15	10	250	500	875	49.59	48.44	52.78	2.33	6.43	8.97
KOMBINASI ROTOR R3 R1 DAN R2														
22	50	40	15	5	10	125	500	750	50.21	43.03	44.14	14.31	12.09	2.58
22	50	40	15	5	10	125	500	875	51.52	47.71	48.41	7.40	6.04	1.47
22	50	40	15	5	10	250	500	750	46.28	41.17	40.38	11.05	12.75	1.91
22	50	40	15	5	10	250	500	875	47.59	45.65	43.78	4.09	8.01	4.09

Keterangan :

E₁= Prosentase Kesalahan Transformasi Matriks Pada Gyroscopic Efek terhadap M.Polinomial

E₂= Prosentase Kesalahan Transformasi Matriks Pada Gyroscopic Efek terhadap Hasil Eksperimentasi