

**M7-020 Analisis Kesalahan Fungsi Respon Frekuensi  
Akibat Penggunaan Jendela Eksponensial  
pada Pengujian Getaran dengan Eksitasi Impak  
Kasus Domain Waktu Kontinu**

**Noval Lilansa, Zainal Abidin, Djoko Suharto**

Lab. Dinamika PAU-IR, Institut Teknologi Bandung  
Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia. Email: [noval\\_lilansa@yahoo.co.id](mailto:noval_lilansa@yahoo.co.id)

## **ABSTRAK**

*Makalah ini memaparkan persamaan matematik yang menunjukkan hubungan antara konstanta waktu dari jendela eksponensial, waktu rekam sinyal respon dan kesalahan yang terjadi pada besar FRF (Fungsi Respon Frekuensi) di daerah frekuensi pribadi. Berdasarkan persamaan yang dikembangkan dipaparkan juga dengan rinci hubungan antara konstanta waktu dari jendela eksponensial, kesalahan pada rasio redaman dan kesalahan pada frekuensi pribadi dari sistem getaran dengan eksitasi impak. Persamaan matematik yang dimaksud dikembangkan berdasarkan model matematik dari sistem getaran 1-dof (one degree of freedom) dengan redaman viskus. Selain itu, dalam penurunan persamaan ini diasumsikan bahwa sinyal eksitasi impak dan sinyal respon getaran dianggap tidak terkontaminasi oleh derau (noise). Di samping itu, juga diasumsikan bahwa sinyal eksitasi impak merupakan impuls ideal yang berupa fungsi delta Dirac. Sebagai ilustrasi dari kesalahan yang dipaparkan, disajikan beberapa contoh numerik dari sistem 1-dof.*

## **ABSTRACT**

*This paper describes mathematical equations explaining the relation between the window time constant and errors in the FRF magnitude at the natural frequency. The derived mathematical equations describe in detail the relation between the window time constant, errors in the damping ratio and the natural frequency of the impact excitation vibration system. The vibration system is modeled by 1-dof vibration system with viscous damping. In this paper, the impact excitation signal as well as the response signal is assumed to be noise free. In addition, the impact signal is modeled by Dirac impuls function. For illustration, several numerical examples for the 1-dof vibration system are given to describe the FRF errors.*

**Keywords: FRF error, exponential window function, impact excitation vibration system.**

---

## 1. Pendahuluan

Fungsi jendela eksponensial merupakan fungsi pembobot domain waktu yang nilainya meluruh secara eksponensial dengan penambahan waktu. Kecepatan peluruhannya ditentukan oleh konstanta waktu dari jendela eksponensial tersebut. Semakin kecil konstanta waktunya maka semakin cepat fungsi jendela eksponensial meluruh hingga nol. Fungsi jendela ini banyak digunakan dalam pengujian getaran dengan eksitasi impak yang bertujuan untuk mengurangi kesalahan FRF akibat kebocoran spektrum yang dapat terjadi pada sistem getaran dengan redaman kecil. Selain itu, penggunaan fungsi jendela eksponensial juga bertujuan untuk meningkatkan rasio S/N pada sinyal respon dari sistem getaran dengan rasio redaman besar. Pada sistem getaran dengan rasio redaman kecil, fungsi jendela eksponensial memaksa sinyal respon getaran meluruh hingga nol pada waktu perekaman yang telah ditentukan. Sementara itu, pada sistem getaran dengan rasio redaman besar, jendela eksponensial meluruh mengikuti sinyal respon sehingga derau pada sinyal dapat dikurangi setelah respon meluruh menjadi nol.

Sayangnya, penggunaan fungsi jendela eksponensial pada sinyal respon dari sistem getaran dengan redaman kecil menyebabkan distorsi pada FRF yang diperoleh [1]. Akibatnya, penggunaan fungsi jendela eksponensial mempengaruhi rasio redaman sistem getaran yang ditentukan dari FRF tersebut [2, 3, 4]. Meskipun demikian, rasio redaman sebenarnya dari sistem getaran dapat diperoleh kembali dengan cara melakukan koreksi berdasarkan konstanta waktu dari jendela eksponensial [2, 4]. Selain terhadap rasio redaman, penggunaan fungsi jendela ini juga berpengaruh terhadap frekuensi pribadi dan residu yang diperoleh [3].

Makalah ini memaparkan persamaan matematik yang mengungkap kesalahan pada besar FRF yang ditimbulkan akibat penggunaan fungsi jendela eksponensial dengan panjang waktu rekam sinyal respon yang terbatas pada pengujian getaran dengan eksitasi impak. Selain itu, juga dipaparkan persamaan matematik yang mengungkap pengaruh konstanta waktu dari jendela eksponensial terhadap rasio redaman dan frekuensi pribadi yang diperoleh dari besar FRF (yang mengandung kesalahan). Analisis matematik yang dilakukan menggunakan model sistem getaran 1-dof dengan redaman viskus. Sinyal eksitasi impak dimodelkan secara matematik dengan fungsi delta Dirac. Untuk menunjukkan kesalahan yang dimaksud diberikan beberapa contoh numerik.

## 2. FRF Akibat Penggunaan Fungsi Jendela Eksponensial

Dalam domain waktu kontinu, hubungan antara respon dan eksitasi dari sistem SISO (*single input single output*) yang berkarakter LTI (*linear time-invariant*) dan kausal dapat dinyatakan dalam bentuk integral konvolusi berikut :

$$x(t) = \begin{cases} \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau, & 0 \leq t < \infty \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases} \quad (1)$$

di mana  $h(t)$  menyatakan fungsi respon impuls dari sistem getaran,  $f(t)$  menyatakan sinyal eksitasi teoritik yang diterapkan ke sistem dan  $x(t)$  menyatakan sinyal respon teoritik yang dihasilkan oleh sistem. Apabila fungsi jendela eksponensial digunakan untuk mempercepat peluruhan sinyal respon dari sistem ini dalam waktu rekam yang terbatas maka sinyal yang diakuisisi dapat dinyatakan sebagai berikut:

---

# Seminar Nasional Tahunan Teknik Mesin (SNTTM) VIII

Universitas Diponegoro, Semarang 11-12 Agustus 2009

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t) \cdot w_{\text{exp}}(t), & 0 \leq t < T_{\text{RL}} \\ 0, & t < 0, t \geq T_{\text{RL}} \end{cases}, \quad (2)$$

di mana  $T_{\text{RL}}$  adalah panjang waktu rekam,  $\hat{x}(t)$  menyatakan sinyal respon yang diakusisi setelah digunakan fungsi jendela eksponensial dan  $w_{\text{exp}}(t)$  adalah fungsi jendela eksponensial. Fungsi jendela ini didefinisikan dengan persamaan berikut ini:

$$w_{\text{exp}}(t) = \begin{cases} e^{-t/\tau_{\text{exp}}}, & 0 \leq t < T_{\text{RL}} \\ 0, & t < 0, t \geq T_{\text{RL}} \end{cases}, \quad (3)$$

di mana  $\tau_{\text{exp}}$  adalah konstanta waktu dari jendela eksponensial. Substitusi Persamaan (1) dan (3) ke Persamaan (2) selanjutnya menghasilkan hubungan antara sinyal respon akibat penggunaan fungsi jendela eksponensial dalam waktu rekam yang terbatas dan sinyal eksitasi yaitu:

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} e^{-t/\tau_{\text{exp}}} \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau, & 0 \leq t < T_{\text{RL}} \\ 0, & t < 0, t \geq T_{\text{RL}} \end{cases} \quad (4)$$

Sebagaimana diekspresikan pada Persamaan (4),  $\hat{x}(t)$

bernilai nol untuk  $t < 0$  dan  $t \geq T_{\text{RL}}$ . Ini berarti bahwa apabila  $f(t)$  bernilai nol untuk  $t < 0$  dan  $t \geq T_1$  dan  $h(t)$  bernilai nol untuk  $t < 0$  dan  $t \geq T_2$  maka berdasarkan integral konvolusi pada Persamaan (4) dapat diungkapkan hubungan antara  $T_1$ ,  $T_2$  dan  $T_{\text{RL}}$ , yaitu  $T_1 + T_2 = T_{\text{RL}}$ . Dengan demikian dapat diungkapkan bahwa dalam kasus panjang waktu rekam yang terbatas, rentang eksitasi yang berbeda akan menghasilkan rentang respon impuls yang berbeda pula. Akibatnya, perilaku TI (*time invariant*) dari sistem hanya berlaku untuk eksitasi dengan rentang yang sama.

Pada sistem yang beroperasi dengan sinyal deterministik, FRF yang diperoleh akibat penggunaan fungsi jendela eksponensial yang dinotasikan dengan  $\hat{\alpha}(\omega)$  ditentukan dengan cara membagi spektrum

$\hat{X}(\omega)$  dan spektrum  $\hat{F}(\omega)$ . Spektrum  $\hat{X}(\omega)$  menyatakan

spektrum respon akibat penggunaan fungsi jendela eksponensial dengan waktu rekam yang terbatas,

sedangkan spektrum  $\hat{F}(\omega)$  menyatakan spektrum gaya

eksitasi yang diakusisi dengan waktu rekam yang terbatas pula. Spektrum respon diperoleh dengan Transformasi Fourier terhadap Persamaan (4), yaitu:

$$\hat{X}(\omega) = \int_0^{T_{\text{RL}}} \left\{ \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau \right\} e^{-t/\tau_{\text{exp}}} e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

Apabila urutan integral pada Persamaan (5) diubah dan variabel baru  $p = t - \tau$  diperkenalkan maka diperoleh:

$$\hat{X}(\omega) = \begin{bmatrix} \int_0^{T_{RL}} f(\tau) e^{-j\left(\omega - j\frac{1}{\tau_{exp}}\right)\tau} d\tau \\ \int_0^{\infty} h(p) e^{-j\left(\omega - j\frac{1}{\tau_{exp}}\right)p} dp \\ - \int_0^{T_{RL}} f(\tau) \left[ \int_{T_{RL}}^{\infty} h(t - \tau) e^{-t/\tau_{exp}} e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \end{bmatrix} \quad (6)$$

di mana  $j = \sqrt{-1}$ .

Spektrum gaya eksitasi ditentukan juga dengan Transformasi Fourier terhadap sinyal gaya eksitasi yang diakuisisi dalam rentang waktu rekam yang terbatas.

Sinyal gaya eksitasi ini dinotasikan dengan  $\hat{f}(t)$  dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t < T_{RL} \\ 0, & t < 0, t \geq T_{RL} \end{cases} \quad (7)$$

Transformasi Fourier terhadap Persamaan (7) kemudian menghasilkan persamaan berikut ini:

$$\hat{F}(\omega) = \int_0^{T_{RL}} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (8)$$

Jadi, berdasarkan Persamaan (8) dan teorema pergeseran dalam kawasan frekuensi pada Transformasi Fourier, FRF akibat penggunaan fungsi jendela eksponensial dalam rentang waktu rekam yang terbatas dinyatakan dalam bentuk persamaan berikut ini:

$$\hat{\alpha}(\omega) = \frac{\hat{X}(\omega)}{\hat{F}(\omega)} = \frac{\hat{F}\left(\omega - j\frac{1}{\tau_{exp}}\right)}{\hat{F}(\omega)} \cdot H\left(\omega - j\frac{1}{\tau_{exp}}\right) = \frac{\int_0^{T_{RL}} f(\tau) \left[ \int_{T_{RL}}^{\infty} h(t - \tau) e^{-\left(\omega - j\frac{1}{\tau_{exp}}\right)t} dt \right] d\tau}{\hat{F}(\omega)} \quad (9)$$

Persamaan (9) mengungkapkan bahwa akibat penggunaan fungsi jendela eksponensial dalam rentang waktu rekam yang terbatas, FRF yang diperoleh tergantung pada beberapa hal yaitu sinyal eksitasi, fungsi respon impuls, konstanta waktu  $\tau_{exp}$  dari jendela eksponensial dan panjang waktu rekam  $T_{RL}$ . Jika  $T_{RL}$  mendekati tak hingga maka suku [...] pada Persamaan (9) mendekati nol. Ini berarti bahwa

akibat penggunaan fungsi jendela eksponensial, FRF yang diperoleh tidak identik dengan spektrum respon impuls meskipun panjang waktu rekam yang digunakan sangat lama.

### 3. Kesalahan FRF dari Sistem Getaran 1-DOF

Sistem getaran 1-dof dengan redaman viskus memiliki fungsi respon impuls  $h(t)$  yang dinyatakan sebagai berikut:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t, & t \geq 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}, \quad (10)$$

di mana  $\omega_d = 2\pi f_d$  menyatakan frekuensi pribadi teredam,  $\omega_n = 2\pi f_n$  menyatakan frekuensi pribadi tak teredam dan  $0 < \zeta < 1$  menyatakan rasio redaman. Akibat eksitasi impak yang berupa fungsi delta Dirac dan penggunaan fungsi jendela eksponensial pada sinyal respon, maka berdasarkan Persamaan (10) penyelesaian Persamaan (9) menghasilkan FRF berikut ini:

$$\hat{\alpha}(\omega) = \frac{N_{\hat{\alpha}}(\omega)}{D_{\hat{\alpha}}(\omega)} \quad (11)$$

di mana:

$$N_{\hat{\alpha}}(\omega) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m} e^{-\left(\zeta\omega_n + \frac{1}{\tau_{exp}}\right)T_{RL}} \cdot \left\{ \frac{\zeta\omega_n + 1/\tau_{exp}}{\omega_d} \sin \omega_d T_{RL} + \cos \omega_d T_{RL} + j \frac{\omega}{\omega_d} \sin \omega_d T_{RL} \right\} e^{-j\omega T_{RL}}, \quad (12)$$

$$D_{\hat{\alpha}}(\omega) = \text{Re } D_{\hat{\alpha}}(\omega) + j \text{Im } D_{\hat{\alpha}}(\omega), \quad (13)$$

$$\text{Re } D_{\hat{\alpha}}(\omega) = \omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_n/\tau_{exp} + 1/\tau_{exp}^2, \quad (14)$$

$$\text{Im } D_{\hat{\alpha}}(\omega) = 2 \zeta\omega_n + 1/\tau_{exp} \omega \quad (15)$$

Berdasarkan Persamaan (11) sampai (15) dapat diungkapkan bahwa apabila sinyal respon getaran diakuisisi dengan waktu rekam yang lama, yaitu  $T_{RL} \rightarrow \infty$ , maka pembilang dari FRF mendekati  $1/m$ . Sementara itu, penyebutnya tidak dipengaruhi oleh lamanya waktu rekam yang dimaksud. Selanjutnya, karena FRF teoritik dari sistem getaran 1-dof dengan redaman viskus adalah:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega} \quad (16)$$

maka dapat diungkapkan bahwa meskipun waktu rekam diatur sangat lama penyebut dari FRF yang diperoleh tidak identik dengan penyebut dari FRF teoritik. Ini berarti bahwa kesalahan FRF akibat penerapan fungsi jendela eksponensial pada sinyal respon getaran tidak dapat dihilangkan hanya dengan cara mengatur waktu rekam.

Dalam pengujian FRF parameter karakteristik dinamik, yang mencakup rasio redaman dan frekuensi pribadi, dan bentuk modus getar dari struktur uji ditentukan berdasarkan besar FRF yang diperoleh. Dalam hal ini, besar FRF di daerah frekuensi pribadi merupakan parameter yang menentukan. Oleh sebab itu, dalam makalah ini analisis kesalahan FRF difokuskan pada analisis kesalahan terhadap besar FRF di daerah frekuensi pribadi. Di sini analisis kesalahan yang dikembangkan adalah analisis terhadap kesalahan terbesar yang mungkin terjadi pada besar FRF di daerah frekuensi pribadi.

Selanjutnya, didefinisikan kesalahan FRF yang terjadi akibat penggunaan fungsi jendela eksponensial pada sinyal respon sebagai berikut:

$$\varepsilon_{\omega} = \frac{\alpha_{\omega} - \hat{\alpha}_{\omega}}{\alpha_{\omega}} \quad (17)$$

Menurut ketidaksamaan segitiga invers (*inverse triangle inequality*) Persamaan (17) dapat dinyatakan dalam bentuk hubungan berikut ini:

$$\frac{|\alpha_{\omega} - \hat{\alpha}_{\omega}|}{|\alpha_{\omega}|} \geq \frac{||\alpha_{\omega}| - |\hat{\alpha}_{\omega}||}{|\alpha_{\omega}|}, \quad (18)$$

Suku sebelah kiri pada Persamaan (18) menyatakan nilai absolut dari kesalahan FRF pada Persamaan (17), sedangkan suku sebelah kanan menyatakan kesalahan yang terjadi pada besar FRF. Berdasarkan ketidaksamaan pada Persamaan (18) dapat diungkapkan bahwa nilai absolut dari Persamaan (17) menyatakan kesalahan terbesar yang mungkin terjadi pada besar FRF akibat penggunaan fungsi jendela eksponensial pada sinyal respon getaran.

Untuk menentukan kesalahan terbesar yang dimaksud, Persamaan (11) sampai (15) perlu disubstitusikan ke Persamaan (17). Apabila kesalahan yang terjadi pada besar FRF dinotasikan dengan  $\tilde{\varepsilon}_{\omega}$  maka didapatkan persamaan untuk kesalahan terbesar yang terjadi pada besar FRF pada  $\omega = \omega_n$ , yaitu:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\max} \omega_n &= |\varepsilon_{\omega_n}| \\ &= \frac{\sqrt{\operatorname{Re}^2 [N_{\varepsilon} \omega_n] + \operatorname{Im}^2 [N_{\varepsilon} \omega_n]}}{\sqrt{\operatorname{Re}^2 [D_{\varepsilon} \omega_n] + \operatorname{Im}^2 [D_{\varepsilon} \omega_n]}} \end{aligned} \quad (19)$$

di mana:

---

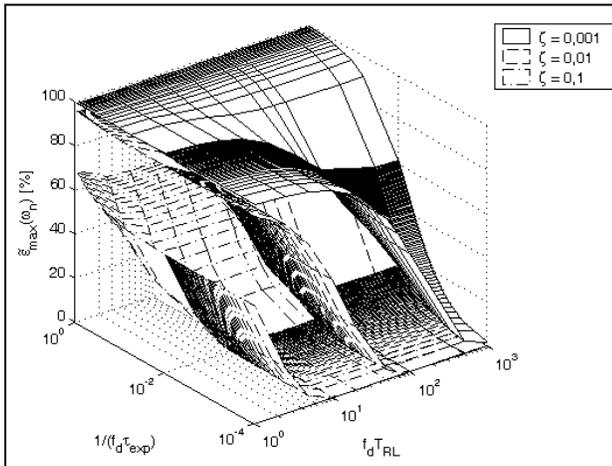
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[N_{\varepsilon} \omega_n\right] &= \frac{1}{\zeta \omega_n \tau_{\text{exp}}} + e^{-\left(\zeta \omega_n + \frac{1}{\tau_{\text{exp}}}\right) T_{\text{RL}}} \\ &\cdot \left[ \frac{\zeta \omega_n + 1/\tau_{\text{exp}}}{\omega_d} \cos \omega_n T_{\text{RL}} \sin \omega_d T_{\text{RL}}, \quad (20) \right. \\ &+ \cos \omega_n T_{\text{RL}} \cos \omega_d T_{\text{RL}} \\ &\left. + \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_n T_{\text{RL}} \sin \omega_d T_{\text{RL}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left[N_{\varepsilon} \omega_n\right] &= e^{-\left(\zeta \omega_n + \frac{1}{\tau_{\text{exp}}}\right) T_{\text{RL}}} \left[ \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d T_{\text{RL}} \right. \\ &\cdot \cos \omega_n T_{\text{RL}} - \frac{\zeta \omega_n + 1/\tau_{\text{exp}}}{\omega_d} \sin \omega_n T_{\text{RL}}, \quad (21) \\ &\cdot \sin \omega_d T_{\text{RL}} - \sin \omega_n T_{\text{RL}} \cos \omega_d T_{\text{RL}} \\ &\left. - \left( \frac{1}{\omega_n \tau_{\text{exp}}} + \frac{1}{2\zeta \omega_n^2 \tau_{\text{exp}}^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}\left[D_{\varepsilon} \omega_n\right] = 1 + \frac{1}{\zeta \omega_n \tau_{\text{exp}}}, \quad (22)$$

$$\operatorname{Im}\left[D_{\varepsilon} \omega_n\right] = -\left( \frac{1}{\omega_n \tau_{\text{exp}}} + \frac{1}{2\zeta \omega_n^2 \tau_{\text{exp}}^2} \right) \quad (23)$$

Berdasarkan Persamaan (19) sampai (23) dapat diungkapkan perilaku kesalahan di daerah frekuensi  $\omega_n$  pada besar FRF dari sistem getaran 1-DOF dengan redaman viskus, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 1. Perilaku yang diperoleh mengungkapkan bahwa kesalahan yang terjadi pada besar FRF di frekuensi  $\omega_n$  ditentukan oleh sejumlah parameter yang mencakup parameter sistem dan parameter pengukuran. Parameter sistem meliputi frekuensi pribadi teredam ( $f_d$ ) dan rasio redaman ( $\zeta$ ), sedangkan parameter pengukuran meliputi konstanta waktu jendela eksponensial ( $\tau_{\text{exp}}$ ) dan waktu rekam ( $T_{\text{RL}}$ ). Untuk sistem dengan  $f_d$  dan  $\zeta$  tertentu dapat diungkapkan bahwa semakin besar  $\tau_{\text{exp}}$  maka semakin kecil kesalahan yang terjadi pada besar FRF. Pada saat yang sama, peningkatan nilai  $T_{\text{RL}}$  mengakibatkan pengurangan pada kesalahan yang terjadi. Apabila  $\zeta$  kemudian divariasikan untuk beberapa nilai, yaitu 0,001, 0,01 dan 0,1, dapat diungkapkan bahwa semakin kecil  $\zeta$  maka semakin besar kesalahan yang terjadi.

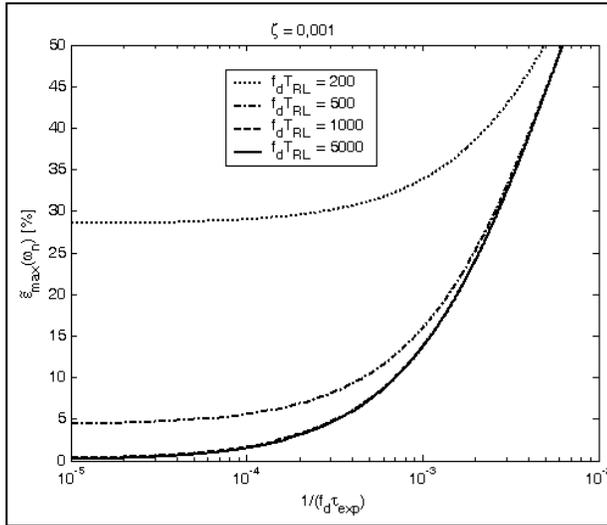


Gambar Kesalahan terbesar yang mungkin  
1 terjadi pada besar FRF di  $\omega_n$  untuk  
sistem getaran 1-dof.

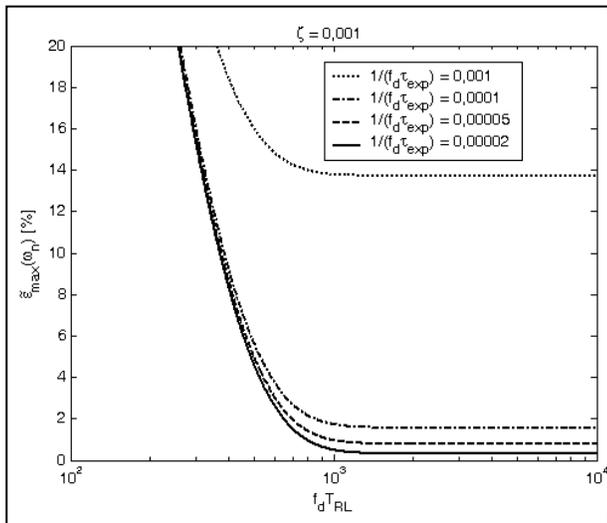
Agar kesalahan terbesar yang terjadi tidak lebih dari 5% maka diperlukan pengaturan  $\tau_{exp}$  dan  $T_{RL}$ . Seperti telah dikemukakan, rasio redaman yang kecil mengakibatkan kesalahan yang besar. Oleh sebab itu, pengaturan  $\tau_{exp}$  dan  $T_{RL}$  dilakukan berdasarkan  $\zeta = 0,001$ . Gambar 2 memperlihatkan perilaku kesalahan terbesar yang terjadi pada besar FRF di daerah  $\omega = \omega_n$  untuk sistem getaran dengan  $\zeta = 0,001$ . Gambar 2(a) menunjukkan pengaruh perubahan konstanta waktu jendela eksponensial terhadap kesalahan yang terjadi untuk beberapa nilai waktu rekam, sedangkan Gambar 2(b) menunjukkan pengaruh perubahan waktu rekam terhadap kesalahan yang terjadi untuk beberapa nilai konstanta waktu jendela eksponensial. Berdasarkan kedua pengaruh ini diungkapkan bahwa jika  $1/(f_d \tau_{exp}) < 0,00002$  dan  $f_d T_{RL} > 1000$  kesalahan yang terjadi tidak dipengaruhi oleh variasi baik dari konstanta waktu jendela eksponensial maupun waktu rekam. Ini berarti bahwa menurut Gambar 2(a) dan 2(b) kesalahan maksimum yang kurang dari atau sama dengan 5% dapat dicapai apabila konstanta waktu jendela eksponensial dan waktu rekam yang diterapkan pada sinyal respon dari sistem getaran dengan  $\zeta \geq 0,001$  diatur sehingga:

$$\frac{1}{f_d \tau_{exp}} \leq 0,00005, \quad (24)$$

$$f_d T_{RL} \geq 500 \quad (25)$$



(a)



(b)

Gambar Kesalahan terbesar yang mungkin  
 2 terjadi pada besar FRF di daerah  $\omega_n$   
 untuk sistem getaran 1-dof dengan  $\zeta =$   
 0,001: (a) Variasi  $T_{RL}$ , (b) Variasi  $\tau_{\text{exp}}$ .

## 4. Kesalahan Parameter Karakteristik Dinamik Sistem Getaran 1-DOF

Di sini, kesalahan yang terjadi pada parameter karakteristik dinamik diungkapkan dengan cara membandingkan *pole* yang diperoleh dari fungsi transfer akibat penggunaan fungsi jendela eksponensial dengan *pole* yang diperoleh dari fungsi transfer teoritik. Kedua fungsi transfer ini dikembangkan dari FRF dengan substitusi  $s$  ke  $j\omega$ .

Sekarang, apabila  $s = j\omega$  disubstitusikan ke Persamaan (11) sampai (15) dan kemudian  $D_{\hat{\zeta}} s = 0$  maka *pole* yang

diperoleh dari fungsi transfer akibat penggunaan fungsi jendela eksponensial adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{s}_{1,2} &= -\zeta\omega_n + 1/\tau_{\text{exp}} \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -\hat{\zeta}\hat{\omega}_n \pm j\hat{\omega}_d, \\ &= -\hat{\zeta}\hat{\omega}_n \pm j\hat{\omega}_n\sqrt{1-\hat{\zeta}^2} \end{aligned} \quad (26)$$

di mana  $\hat{\zeta}$  dan  $\hat{\omega}_n$  masing-masing menyatakan rasio redaman dan frekuensi pribadi tak teredam yang diperoleh dari pengujian FRF dengan menggunakan fungsi jendela eksponensial. Sementara itu, *pole* teoritik dari sistem 1-dof adalah:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_d \end{aligned} \quad (27)$$

Apabila kedua *pole* ini kemudian dibandingkan maka dapat dikembangkan beberapa hubungan berikut ini:

$$\frac{\hat{\zeta}}{\zeta} = \frac{1 + \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta 2\pi} \frac{1}{\tau_{\text{exp}} f_d}}{\sqrt{1 + \frac{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi} \cdot \frac{1}{\tau_{\text{exp}} f_d} + \frac{1-\zeta^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{\tau_{\text{exp}} f_d^2}}}, \quad (28)$$

$$\frac{\hat{f}_n}{f_n} = \sqrt{1 + \frac{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi} \cdot \frac{1}{f_d \tau_{\text{exp}}} + \frac{1-\zeta^2}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{f_d \tau_{\text{exp}}}\right)^2}, \quad (29)$$

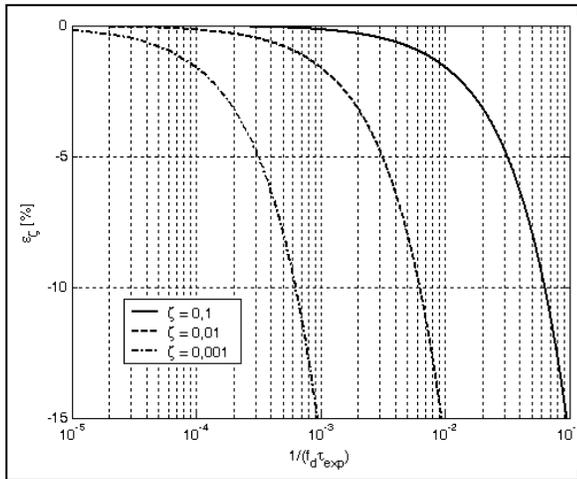
$$\frac{\hat{f}_d}{f_d} = 1 \quad (30)$$

Berdasarkan Persamaan (28) sampai (30) diungkapkan bahwa frekuensi pribadi teredam yang diperoleh dari pengujian FRF dengan menggunakan fungsi jendela eksponensial adalah identik dengan frekuensi pribadi teoritik. Namun, frekuensi pribadi tak teredam dan rasio redaman yang diperoleh tidak identik dengan nilai teoritiknya. Kesalahan yang terjadi pada frekuensi pribadi tak teredam dan rasio redaman

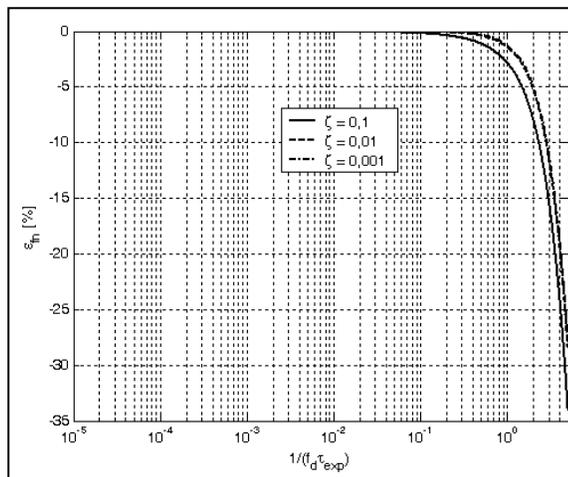
# Seminar Nasional Tahunan Teknik Mesin (SNTTM) VIII

Universitas Diponegoro, Semarang 11-12 Agustus 2009

dinyatakan dalam bentuk kesalahan relatif dan ditunjukkan pada Gambar 3. Kesalahan pada rasio redaman dinotasikan dengan  $\varepsilon_\zeta$  dan ditunjukkan pada Gambar 3(a), sedangkan kesalahan pada frekuensi pribadi tak teredam dinotasikan dengan  $\varepsilon_{f_n}$  dan ditunjukkan pada Gambar 3(b). Berdasarkan perilaku kesalahan yang diperoleh dapat diungkapkan bahwa pada sistem 1-dof untuk  $f_d$  dan  $\zeta$  tertentu, semakin kecil  $\tau_{exp}$  maka semakin besar kesalahan rasio redaman yang didapat dari pengujian FRF. Sementara itu, semakin kecil  $\tau_{exp}$  maka semakin besar kesalahan frekuensi pribadi tak teredam yang didapat dari pengujian FRF. Kemudian, apabila  $\zeta$  dari sistem divariasikan, yaitu  $\zeta = 0,001, 0,01, 0,1$ , dapat diungkapkan bahwa semakin kecil rasio redaman sistem maka semakin besar kesalahan rasio redaman yang didapat dari pengujian FRF. Pada saat yang sama, semakin kecil rasio redaman sistem maka semakin kecil kesalahan frekuensi pribadi tak teredam yang didapat dari pengujian FRF.



(a)



(b)

Gambar Kesalahan parameter karakteristik  
3 dinamik untuk sistem 1-dof: (a)  
Kesalahan pada  $\zeta$ , (b) Kesalahan pada  
 $f_n$ .

Agar kesalahan yang terjadi pada rasio redaman dan frekuensi pribadi tak teredam yang didapat dari pengujian getaran dengan eksitasi impak tidak lebih dari 5% maka diperlukan pengaturan parameter pengukuran, yaitu  $\tau_{exp}$ . Berdasarkan Gambar 3(a) dapat diungkapkan bahwa untuk  $\zeta \geq 0,001$  dan  $f_d$  tertentu kesalahan pada rasio redaman yang kurang dari atau sama dengan 5% dapat dicapai apabila konstanta waktu jendela eksponensial diatur sehingga:

$$\frac{1}{f_d \tau_{exp}} \leq 0,0003 \quad (31)$$

Sementara itu, berdasarkan Gambar 3(b) dapat diungkapkan bahwa jika  $1/(f_d \tau_{exp}) < 0,07$  maka kesalahan yang terjadi pada frekuensi pribadi tak teredam tidak dipengaruhi oleh variasi konstanta waktu jendela eksponensial dan kurang dari 5%.

## 5. Contoh Numerik

Beberapa contoh numerik disajikan untuk menunjukkan pengaruh waktu jendela eksponensial dan waktu rekam sinyal respon dari sistem getaran 1-dof dengan redaman viskus terhadap kesalahan yang terjadi pada besar FRF di daerah  $\omega = \omega_n$ , kesalahan pada rasio redaman dan frekuensi pribadi tak teredam. Pengujian FRF ini dimodelkan dengan menggunakan model sistem getaran yang dieksitasi dengan fungsi delta Dirac. Model ini terdiri atas tiga model, yaitu model A, model B dan model C. Ketiga model ini memiliki frekuensi pribadi teredam yang tetap dan rasio redaman yang bervariasi, sebagaimana ditunjukkan pada Tabel 1. Dengan bantuan Matlab ditentukan FRF dan respon getaran dari tiga model yang dimaksud.

Selanjutnya, pada Tabel 2 ditunjukkan nilai dari konstanta waktu jendela eksponensial dan waktu rekam. Nilai ini ditentukan dengan membuat kesalahan yang terjadi tidak lebih dari 5%. Ini berarti bahwa dari ketiga ketidaksamaan pada Persamaan (24), (25) dan (31), yang memenuhi tujuan ini adalah ketidaksamaan pada Persamaan (24) dan (25). Selain itu, pada tabel ini juga ditunjukkan nilai dari besar FRF di  $\omega = \omega_n$ , rasio redaman dan frekuensi pribadi tak teredam. Rasio redaman ditentukan dengan metode *logaritmik decrement*, sedangkan frekuensi pribadi tak teredam ditentukan dari rasio redaman yang diperoleh dan frekuensi pribadi teredam. Karena tidak mengandung kesalahan maka frekuensi pribadi teredam ditentukan dari frekuensi pribadi teredam teoritik. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa ketidaksamaan yang dikembangkan dapat menekan kesalahan yang terjadi pada besar FRF di daerah  $\omega = \omega_n$  tidak lebih dari 5%. Sementara itu, kesalahan yang terjadi pada rasio redaman dan frekuensi pribadi tak teredam jauh dibawah 5%. Nilai ini bersesuaian dengan prediksi kesalahan yang dikembangkan di atas.

# Seminar Nasional Tahunan Teknik Mesin (SNTTM) VIII

Universitas Diponegoro, Semarang 11-12 Agustus 2009

**Tabel Model sistem 1-dof dengan redaman viskus dan  $m = 0,0016$  kg,  $f_d = 100$  Hz.**

Model Sistem	Rasio redaman teoritik $\zeta$	Frekuensi pribadi tak teredam teoritik $f_n$ [Hz]	Besar FRF teoritik di $\omega = \omega_n$ $ \alpha(\omega_n) $
A	0,00100	100,00005	0,79157
B	0,01000	100,00500	0,07915
C	0,10000	100,50378	0,0078366

**Tabel 2** Besar FRF di  $\omega = \omega_n$ , rasio redaman dan frekuensi pribadi tak teredam yang ditentukan dari pengujian FRF dengan menggunakan fungsi jendela eksponensial.

Model Sistem	Konstanta waktu jendela eksponensial $\tau_{exp}$ [detik]	Waktu rekam sinyal respon $T_{RL}$ [detik]	Besar FRF di $\omega = \omega_n$ $ \hat{\alpha}_{\omega_n} $	Rasio redaman $\hat{\zeta}$	Frekuensi pribadi tak teredam $\hat{f}_n$ [Hz]	$\tilde{\varepsilon}_{\omega}$ [%]	$\varepsilon_{\zeta}$ [%]	$\varepsilon_{f_n}$ [%]
A	200	5,000	0,75222	0,001	100,00005	4,97	-1,0	- $5,00 \cdot 10^{-5}$
B			0,07909	0,0102	100,00502	0,08	-0,2	- $5,02 \cdot 10^{-3}$
C			0,0078359	0,099	100,50368	0,09	0,01	- $5,04 \cdot 10^{-1}$

## 6. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis yang dikembangkan, dapat ditarik beberapa kesimpulan yaitu sebagai berikut:

- Telah dikembangkan persamaan matematik yang mengungkap hubungan antara konstanta waktu dari jendela eksponensial, waktu rekam sinyal respon dan kesalahan yang terjadi pada besar FRF, rasio redaman dan frekuensi pribadi tak teredam.
- Persamaan kesalahan yang dikembangkan untuk besar FRF adalah kesalahan terbesar yang mungkin terjadi pada besar FRF di daerah  $\omega = \omega_n$ .
- Kesalahan pada besar FRF merupakan fungsi dari konstanta waktu jendela eksponensial ( $\tau_{exp}$ ), waktu rekam ( $T_{RL}$ ), frekuensi pribadi teredam ( $f_d$ ) dan rasio redaman ( $\zeta$ ).
- Kesalahan pada rasio redaman dan frekuensi pribadi tak teredam merupakan fungsi dari konstanta waktu jendela eksponensial ( $\tau_{exp}$ ), frekuensi pribadi teredam ( $f_d$ ) dan rasio redaman ( $\zeta$ ).
- Untuk  $f_d$  dan  $\zeta$  tertentu, semakin besar konstanta waktu jendela eksponensial maka semakin kecil kesalahan yang terjadi pada besar FRF. Pada saat yang sama, peningkatan nilai  $T_{RL}$  mengakibatkan pengurangan pada kesalahan yang terjadi.
- Variasi nilai  $\zeta$  mengakibatkan perubahan kesalahan yang terjadi. Semakin kecil  $\zeta$  maka semakin besar kesalahan yang terjadi.
- Untuk  $\zeta > 0,001$ , kesalahan maksimum yang kurang dari 5% dapat dicapai apabila konstanta waktu jendela eksponensial dan waktu rekam yang diterapkan pada sinyal respon memenuhi ketidaksamaan berikut:  $1/(f_d\tau_{exp}) < 0,00005$  dan  $f_d T_{RL} > 500$ .
- Pada saat yang sama, ketidaksamaan ini mengakibatkan kesalahan yang terjadi pada rasio redaman dan frekuensi pribadi tak teredam jauh dibawah 5%.

## Referensi

- [1] Ahn, S. J., Jeong, W. B., Yoo, W. S., Unbiased Expression of FRF with Exponential Window Function in Impact Hammer Testing. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 277, Hal. 931 - 941, (2004)
  - [2] Fladung, W., Rost, R., Application and Correction of The Exponential Window For Frequency Response Functions. *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 11, Hal 23 – 36, (1997).
  - [3] Cafeo, J. A., Trethewey, M. W., Impulse Test Truncation and Exponential Window Effects on Spectral and Modal Parameters. *Proceedings of 8<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference*, Vol 1, Hal. 234 – 240, (1990).
  - [4] Clark, R. L., Wicks, A. L., Becker, W. J., Effects of an Exponential Window on the Damping Coefficient. *Proceedings of 7<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference*, Vol 1, Hal 83 – 86, (1989).
-