

## Pemodelan Matematika Dinamika Terbang Wahana Tanpa Awak Monocopter

Ratna Ayu Wandini, Taufiq Mulyanto, Hari Muhammad

Fakultas Teknik Mesin dan Dirgantara  
Institut Teknologi Bandung

Email:ratnaayuwandini@yahoo.com taufiq.mulyanto@ae.itb.ac.id harmad@ae.itb.ac.id

### Abstrak

*Monocopter* merupakan wahana tanpa awak yang memiliki bentuk asimetris terdiri dari satu bilah sayap, satu badan, dan *motor* sebagai pembangkit gaya dorong. *Monocopter* termasuk pada kategori UAV rotary wing dimana seluruh bagian wahana berputar untuk memperoleh gaya angkat. Kecepatan putar *Monocopter* dihasilkan dari torque yang muncul akibat gaya dorong diujung sayap. Berbagai konsekuensi dari bentuk asimetris tersebut membuat aspek dinamika terbang wahana ini menjadi kajian yang menarik.

Penelitian ini akan mengkaji mengenai aspek dinamika terbang dan membuat pemodelan matematika gerak *Monocopter*. Pemodelan akan terfokus pada gerak vertikal yang dipengaruhi langsung oleh kecepatan putar. Pemodelan matematika dinamika terbang *Monocopter* dibuat dengan menggunakan program *Matlab*. Proses yang dilakukan untuk memperoleh pemodelan matematika dinamika terbang *Monocopter* adalah peninjauan ulang desain, penentuan tata acuan koordinat dan orientasi, penurunan persamaan gerak *Monocopter*, penyusunan algoritma dan simulasi gerak *Monocopter*.

Data yang digunakan untuk pemodelan matematika diperoleh dari data perancangan *Monocopter* MC – 11 telah dilakukan oleh Hendi Aji Pratama mahasiswa Aeronotika & Astronotika angkatan 2008. Untuk kebutuhan pemodelan, konfigurasi MC – 11 disederhanakan dengan dua pusat massa dengan massa terdistribusi sepanjang garis <25% MAC sayap. Tata acuan koordinat dan orientasi *Monocopter* untuk kajian dinamika terbang didefinisikan kembali. Persamaan gerak *Monocopter* diturunkan pada koordinat Cartesian sesuai tata acuan koordinat benda.

Metode yang digunakan untuk membuat pemodelan gerak vertikal adalah simulasi. Proses simulasi gerak *Monocopter* menghasilkan grafik pergerakan titik pusat massa. Algoritma program dibuat untuk membantu penyusunan tahap pemodelan matematika yang dibuat dengan software *Matlab*. Simulasi gerak *Monocopter* dilakukan dengan menyusun lima skenario terbang *Monocopter*. Input berupa kecepatan putar divariasikan pada setiap skenario. Variasi input berupa input block dan doublet. Input block dirancang untuk melihat respon *Monocopter* terhadap perubahan input tiba – tiba dan kembali ke kondisi *trim*. Input doublet dirancang untuk melihat respon kecepatan putar *Monocopter* dinaikan dan diturunkan (atau sebaliknya) dengan selisih yang sama dan kembali ke kondisi *trim*.

Hasil yang ingin dicapai adalah pengaruh kecepatan putar *Monocopter* memberikan respon yang benar. Dari hasil simulasi gerak, hal yang dapat disimpulkan bahwa kondisi *trim Monocopter* dapat dicapai jika kecepatan putarnya 496,75 rpm dan tidak ada perubahan input kecepatan putar. Input block pada simulasi dapat menggambarkan perubahan ketinggian *Monocopter* terhadap perubahan kecepatan putar. Untuk simulasi gerak berupa ketinggian *Monocopter* berubah dan *Monocopter* dapat mempertahankan ketinggian tersebut, input kecepatan putarnya dibuat menyerupai *doublet* dimana perubahan kecepatan putarnya diubah secara signifikan. Selisih antara perubahan kecepatan putar minimum atau maksimumnya dengan kecepatan putar kondisi *trim* sama. Simulasi gerak menyimpulkan bahwa pemodelan matematika telah menghasilkan respon yang benar.

**Kata kunci:** *Monocopter*, dinamika terbang, pemodelan matematika, persamaan gerak, simulasi

## Pendahuluan

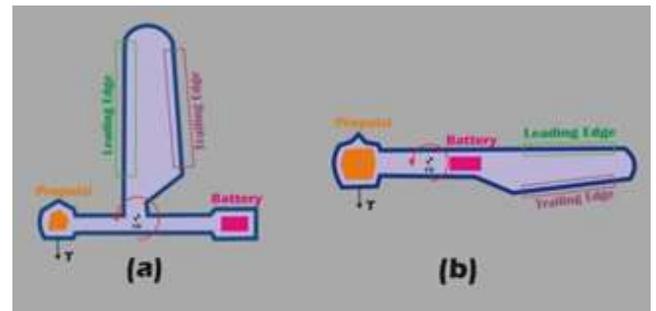
*Monocopter* didefinisikan sebagai UAV yang tersusun atas satu bilah sayap, sebuah mesin pendorong, dan *fuselage* atau *pod* sebagai tempat untuk menyusun sistem kendali. *Monocopter* termasuk pada kategori UAV *rotary wing* dimana seluruh bagian wahana berputar untuk memperoleh gaya angkat [3]. Kecepatan putar *Monocopter* dihasilkan dari *torque* yang muncul akibat gaya dorong diujung sayap.

*Monocopter* memiliki bentuk asimetris menyerupai biji *maple* atau samara [4] sehingga Berbagai konsekuensi dari bentuk asimetris tersebut membuat aspek dinamika terbang wahana ini menjadi kajian yang menarik. Samara memiliki fenomena gerak yang menarik karena putaran daunnya menghasilkan gaya angkat. Gaya angkat tersebut mengurangi kecepatan vertikal samara yang jatuh ke tanah. Dengan gangguan dari angin, samara dapat bergerak turun dan menjauh dari pohon asalnya.

Gerakan *Monocopter* akan dimodelkan dengan menggunakan *Matlab*. Penelitian ini terfokus pada pemodelan gerak vertikal yang dipengaruhi oleh kecepatan putar *Monocopter*. Pemodelan matematika akan melihat respon perubahan ketinggian *Monocopter* jika input kecepatan putarnya berubah.

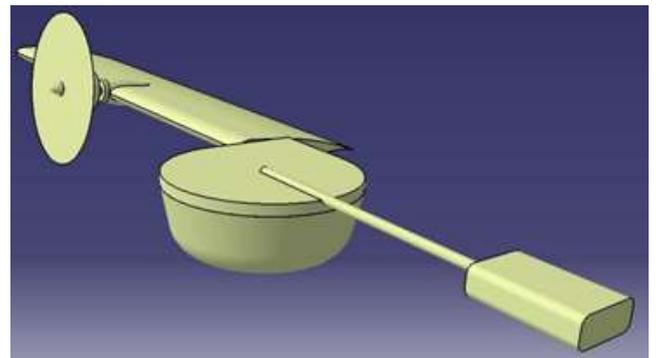
## Jenis – Jenis Monocopter

Berdasarkan posisi sayap dan pembangkit gaya dorong (*motor + propeller*), *Monocopter* terbagi menjadi dua jenis yaitu konfigurasi *straight* dan *cross*. Pada konfigurasi *straight*, posisi sayap dan *motor* sejajar. Posisi sayap dan *motor* untuk konfigurasi *cross* adalah tegak lurus [3]. Ilustrasi mengenai posisi *motor* dan sayap serta terbangkitnya *torque* untuk memutar *Monocopter* dapat dilihat pada gambar 2.3 berikut ini.



**Gambar 1.** Perbedaan posisi motor dan sayap untuk Monocopter konfigurasi cross (a) dan straight (b)

*Monocopter* yang digunakan sebagai objek analisis pada penelitian ini adalah *Monocopter* MC – 11 yang dirancang oleh Hendi Aji Pratama mahasiswa Aeronotika dan Astronotika ITB angkatan 2008. Pada proses perancangan konseptual *Monocopter* MC – 11, konfigurasi *straight* dipilih karena bentuknya sederhana.

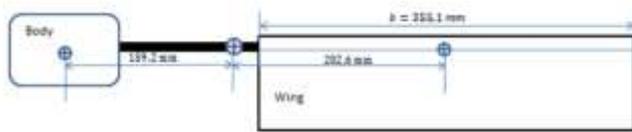


**Gambar 2.** Gambar 3D MC-11 [3]

Dalam penelitian ini, konfigurasi *Monocopter* MC – 11 dimodelkan lebih sederhana. Simplifikasi yang dilakukan pada pemodelan matematika *Monocopter* MC – 11 adalah *motor* ditempatkan di ujung sayap *Monocopter* dan distribusi massa *Monocopter* diasumsikan berada di sepanjang garis MAC ( $< 25\%$  panjang *chord*). Penyusunan komponen *Monocopter* diasumsikan memenuhi kondisi distribusi massa pada pemodelan diatas agar axis *longitudinal Monocopter* konstan.

*Monocopter* MC – 11 tersusun dari beberapa komponen dan sistem yaitu *airframe* (bilah sayap dan *pod Fuselage*), sistem propulsi, dan

sistem kendali. Penempatan komponen - komponen ini mempengaruhi distribusi massa *Monocopter*. Sesuai dengan pemodelan pada gambar 3, distribusi massa *Monocopter* terbagi menjadi dua bagian yaitu  $m_r$  dan  $m_t$ .



**Gambar 3.** Sketsa Penyederhanaan Monocopter Tampak Atas

Distribusi massa  $m_r$  dipengaruhi oleh massa seluruh komponen pengendalian *Monocopter* yang ditempatkan pada *Fuselage pod*. Titik massa  $m_r$  diasumsikan berada di tengah – tengah *Fuselage pod*. Distribusi massa  $m_t$  dipengaruhi oleh massa airframe dan *motor Monocopter*. Titik massa  $m_t$  diasumsikan berada di tengah – tengah sayap. Distribusi massa *Monocopter* diasumsikan terbagi menjadi dua bagian yaitu  $m_r$  dan  $m_t$  dengan titik pusat massa masing – masing berada di tengah fuselage dan sayap.

Analisis awal aerodinamika wahana dilakukan untuk memperoleh parameter kondisi aliran dan data *airfoil* yang digunakan pada *Monocopter*. Pada pemodelan ini, kondisi aliran disederhanakan dengan asumsi massa jenis udara konstan karena lokasi wahana beroperasi konstan dimana ketinggian terbangnya dibawah 50 meter. Perubahan masa jenis karena pengaruh *blade* yang berputar tidak diperhitungkan.

Kondisi aliran udara yang terjadi memiliki bilangan *Reynolds* rendah sekitar 100000 – 500000. Perubahan nilai koefisien aerodinamika *airfoil* untuk rentang bilangan *Reynolds* tersebut sedikit sehingga data yang digunakan adalah koefisien pada  $Re = 100000$ . *Airfoil* yang dipilih pada rancangan MC – 11 adalah NACA 5312.

Tata acuan koordinat yang digunakan pada *Monocopter* adalah TAK benda, inersia, dan angin. Pada kondisi real, tata acuan koordinat benda dan angin berubah sesuai pergerakan titik massa. Untuk mempermudah navigasi dan pengendalian, dipilih TAK tetap yaitu inersia UTB (Utara-Timur-Bawah).

Untuk mempermudah penentuan tata acuan koordinat dan orientasi, bentuk *Monocopter* disederhanakan seperti pada pemodelan *Monocopter* yang dijelaskan bab II. *Center of gravity* wahana diasumsikan tetap berada di antara sayap dan *fuselage pod*. Tata acuan koordinat benda pada *Monocopter* berpusat di titik pusat massa. Ketentuan arah sumbu positif TAK benda adalah,

- Sumbu y positif mengarah ke arah panjang *span*
- Sumbu z positif mengarah ke bawah,
- Sumbu x positif mengikuti aturan tangan kanan.

Tata acuan koordinat inersia berpusat di suatu titik diam sembarang. TAK inersia digunakan sebagai acuan dasar dalam menentukan orientasi sudut pesawat. Ketentuan arah sumbu positif TAK inersia adalah,

- Sumbu y positif mengarah ke kanan (Timur),
- Sumbu z positif mengarah ke bawah,
- Sumbu x positif mengikuti aturan tangan kanan (Utara).

Tata acuan koordinat angin pada *Monocopter* berpusat di center of gravity *Monocopter* dengan ketentuan arah sumbu positif TAK angin adalah,

- Sumbu x positif berimpit dengan vektor kecepatan tangensial benda
- Sumbu z positif tegak lurus dengan sumbu x ke arah bawah
- Sumbu y positif mengikuti aturan tangan kanan

Orientasi sudut antar tata acuan koordinat diperoleh dengan putaran satu TAK terhadap TAK lainnya dan berputar pada satu sumbu koordinat yang berlainan. Putaran antar TAK ini disebut orientasi *Euler* [11]. Sudut orientasi TAK benda dan inersia mendefinisikan tiga sudut yaitu,

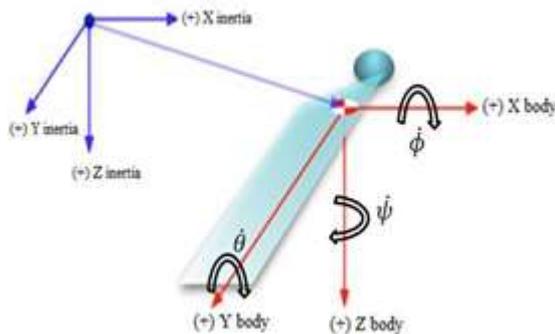
1. Sudut *roll* atau sudut *coning* ( $\phi$ ) adalah sudut pada bidang  $Y_b Z_b$  yang melukiskan kemiringan sayap terhadap bidang horizon lokal,
2. Sudut *pitch* adalah sudut proyeksi sumbu  $X_b$  terhadap horizon lokal,

- Sudut yaw adalah sudut pada bidang horizon lokal, antara garis proyeksi sumbu  $X_b$  dengan sumbu  $X_h$ .

Kecepatan sudut menyatakan perubahan orientasi sudut antar tata acuan koordinat. Perubahan sudut terjadi akibat adanya momen aerodinamika yang dibangkitkan oleh gaya pada *Monocopter*. Momen pada TAK benda *Monocopter* adalah momen *roll*, momen *yaw*, dan momen *pitch*.

- Momen roll ( $L_b$ ) memiliki pusat putaran di sumbu x benda
- Momen yaw ( $N_b$ ) dibangkitkan dengan pusat putaran di sumbu z benda
- Momen pitch ( $M_b$ ) dibangkitkan dengan pusat putaran di sumbu y benda

Penggambaran tata acuan koordinat dan orientasi *Monocopter* dapat diamati dari gambar 4 berikut ini.



**Gambar 4.** Ilustrasi Orientasi Sudut dan Kecepatan Sudut *Monocopter*

### Gaya Angkat *Monocopter*

Gaya angkat *Monocopter* dipengaruhi oleh kecepatan putar sayap. Gaya angkat sepanjang sayap dapat dihitung dengan integrasi pada setiap *section* jarak. Gaya angkat pesawat udara dapat dihitung dengan persamaan dasar yaitu,

$$L = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_L \quad (1)$$

Keterangan :

$L$  = gaya angkat (N)

$\rho$  = massa jenis udara ( $\text{kg/m}^3$ )

$v$  = kecepatan tangensial (m/s)

$S$  = luas sayap ( $\text{m}^2$ )

$C_L$  = koefisien gaya angkat

Untuk sayap berputar, kecepatan tangensial pada persamaan (1) disubstitusi menjadi kecepatan angular dengan persamaan  $v = \omega r$  karena gaya angkat yang dihasilkan sayap dipengaruhi kecepatan putar wahana. Koefisien  $r$  didefinisikan sebagai jarak antara *center of gravity* dengan *tip* sebagai titik gaya dorong. Dengan definisi tersebut, integral persamaan gaya angkat dirumuskan sebagai berikut,

$$L = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_L$$

Dimana  $v = \omega r$  dan  $S = c dr$  maka,

$$dL = \frac{1}{2} \rho (\omega r)^2 C_L c dr$$

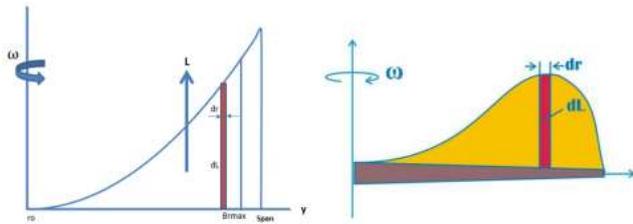
$$L = \frac{1}{2} \rho \omega^2 C_L c \int_{r_0}^{r_{\max}} r^2 dr$$

$$L = \frac{1}{2} \rho \omega^2 C_L c \frac{1}{3} [r^3]_{r_0}^{r_{\max}}$$

$$L = \frac{1}{6} \rho \omega^2 C_L c [r_{\max}^3 - r_0^3]$$

Persamaan gaya angkat ini menggunakan asumsi bahwa tidak ada kebocoran tekanan di *tip* (*tip loss*) akibat pengaruh sayap tiga dimensi.

Pada kenyataannya, asumsi tersebut tidak dapat digunakan karena kebocoran tersebut menyebabkan penurunan gaya angkat yang signifikan akibat keterbatasan dimensi sayap. Ilustrasi distribusi gaya angkat sepanjang sayap yang dipengaruhi oleh *tip loss factor* dapat dilihat pada gambar



**Gambar 5.** Distribusi Gaya Angkat dengan Pengaruh Tip Loss Factor [3]

Untuk memodelkan pengaruh tip loss tersebut maka digunakan koreksi *tip loss factor*. Parameter yang mempengaruhi *tip loss factor* adalah dimensi sayap. Untuk sayap *rectangular*, *tip loss factor* dapat dihitung dengan persamaan sebagai berikut (merujuk pada referensi [3]),

$$B = 1 - \frac{C_{tip}}{R} \quad (3)$$

Keterangan:

- C = *tip loss factor*
- C<sub>tip</sub> = panjang *chord* (m)
- R = jarak antara *chord tip* dengan *center of gravity* (m)

Jika pengaruh *tip loss factor* diterapkan pada persamaan gaya angkat sayap *Monocopter*, maka diperoleh persamaan sebagai berikut (merujuk pada referensi [3]),

$$L = \frac{1}{6} \rho \omega^2 C_{lc} [B r_{max}^3 - r_0^3] \quad (4)$$

Titik tangkap gaya angkat pada *span* sayap *Monocopter* dapat dihitung dengan cara menentukan *centroid* dari luas area dibawah kurva persamaan gaya angkat. Perhitungan dilakukan dengan menggunakan persamaan integral gaya angkat. Fungsi integral *r* menentukan letak titik tangkap gaya angkat *Monocopter* dan persamaan yang digunakan untuk menghitung *centroid* (merujuk pada referensi [13]) adalah,

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_{r_0}^{Br_{max}} r \cdot r^2 dr \quad (5)$$

Keterangan:

$\bar{x}$  = titik tangkap (*centroid*) gaya angkat sayap

*Monocopter* (m)

$$A = \int_{r_0}^{Br_{max}} r^2 dr \quad (6)$$

### Gaya Sentrifugal Monocopter

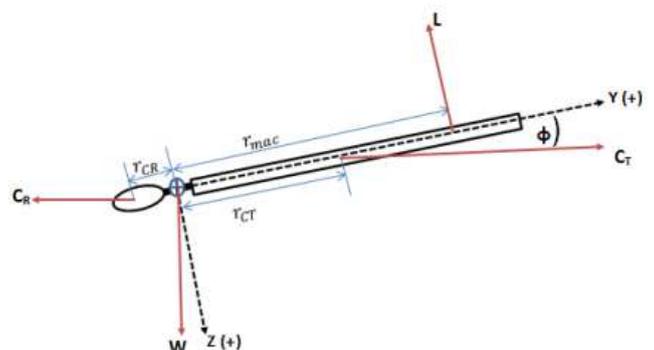
Gaya sentrifugal muncul pada benda yang bergerak membentuk lintasan melengkung dengan arah gaya tegak lurus arah kecepatan. Pada benda berputar, gaya sentrifugal dapat dihitung dengan menggunakan persamaan dasar sebagai berikut [14].

$$F = m \omega^2 r \quad (7)$$

Keterangan:

- FC = gaya sentrifugal (N)
- m = massa benda (Kg)
- $\omega$  = kecepatan putar *Monocopter* (rad/s)
- r = jarak antar titik pusat putaran dengan titik pusat gaya (m).

Gerakan putaran *Monocopter* yang dimodelkan dengan dua pusat massa menghasilkan dua gaya sentrifugal dengan arah gaya yang berlawanan. Posisi titik tangkap gaya sentrifugal diasumsikan berhimpit dengan titik pusat massa pada masing – masing pusat massa *Monocopter*. Arah gaya sentrifugal *Monocopter* diperlihatkan pada diagram benda bebas pada gambar 6 sebagai berikut,



**Gambar 6.** Diagram Benda Bebas *Monocopter*

Gaya sentrifugal yang terjadi pada distribusi massa dapat dihitung dengan persamaan sebagai berikut [4]:

$$C_t = m_t \omega^2 r_{ct} \cos \phi \quad (8)$$

Gaya sentrifugal yang terjadi pada distribusi

massa  $m_r$  dapat dihitung dengan persamaan sebagai berikut [4]:

$$C_r = m_r \omega^2 r_{Cr} \cos \phi \quad (9)$$

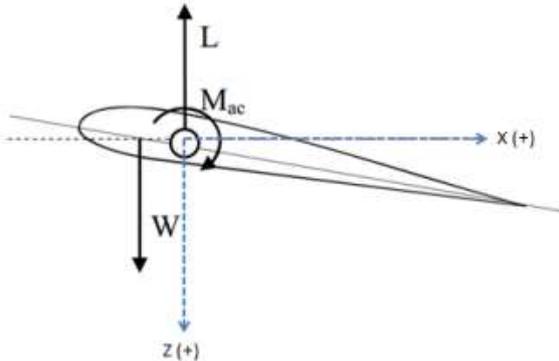
Gaya hambat yang dihasilkan *Monocopter* muncul karena bentuk *airframe Monocopter*. Gaya hambat dan gaya dorong akan mempengaruhi kecepatan angular *Monocopter* untuk membangkitkan gaya angkat. Pada penelitian ini, gaya hambat tidak dipertimbangkan pada pemodelan matematika.

### Persamaan Gaya Dan Momen Monocopter

Persamaan gaya dan momen *Monocopter* dapat diformulasikan berdasarkan diagram benda bebas *Monocopter* pada saat terbang. Analisis gaya dan momen *Monocopter* dilakukan pada bidang X - Z, X - Y, dan Y - Z koordinat Cartesian.

### Persamaan gaya dan momen Monocopter pada bidang X - Z

Gaya yang terjadi pada bidang X dan Z benda adalah gaya angkat, gaya berat, dan momen aerodinamika *Monocopter*. Diagram benda bebas *Monocopter* pada bidang X dan Z dapat dilihat pada gambar 7 berikut ini.



**Gambar 7.** Diagram Benda Bebas Monocopter pada Sumbu X dan Z Benda (modifikasi dari gambar pada referensi [5])

Sesuai dengan perjanjian tanda tata acuan koordinat benda dan DBB tersebut, maka persamaan gaya dan momen *Monocopter* pada bidang X - Z untuk kondisi *trim* dapat dirumuskan sebagai berikut (merujuk pada DBB bidang X - Z *Monocopter* gambar 7).

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0 \downarrow (+) \\ -L + W = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Keterangan:

L = gaya angkat sayap *Monocopter* (N)

W = gaya berat *Monocopter* (N)

$$\begin{aligned} \sum M_{cg} = 0 (+) \curvearrowright \\ W(x_{ac} - x_{cg}) - M_{ac} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Keterangan:

$X_{ac}$  = Jarak referensi ke titik pusat aerodinamika *Monocopter* (m)

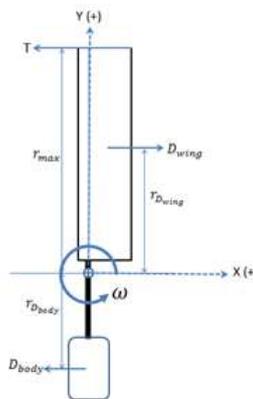
$X_{cg}$  = Jarak referensi ke titik pusat massa *Monocopter* (m)

$M_{ac}$  = Momen aerodinamika sayap *Monocopter* (Nm)

Berdasarkan gambar 3.5, posisi titik pusat massa *Monocopter* pada proyeksi bidang X-Z berada di depan MAC agar *Monocopter* stabil. Pada pemodelan ini, posisi titik distribusi massa *Monocopter* berada kurang dari 25% MAC sayap *straight*. Dari persamaan (11), dapat diketahui bahwa pada saat kondisi *trim*, gaya angkat dan gaya berat *Monocopter* sama.

### Persamaan gaya dan momen Monocopter pada bidang X - Y

Gaya yang terjadi pada bidang X dan Y benda adalah gaya dorong dari *motor + propeller* dan gaya hambat dari *airframe Monocopter*. Diagram benda bebas *Monocopter* pada bidang X dan Y dapat dilihat pada gambar 8 berikut ini.



**Gambar 8.** Diagram Benda Bebas Monocopter pada Sumbu X dan Y Benda

Sesuai dengan perjanjian tanda tata acuan koordinat benda untuk sumbu X dan Y serta DBB tersebut, maka persamaan gaya dan momen *Monocopter* pada bidang X – Y untuk kondisi *trim* dapat dirumuskan sebagai berikut (merujuk pada DBB bidang X – Y *Monocopter* gambar 8).

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \rightarrow (+) \\ -T + D_{wing} - D_{body} &= ma_x \\ a_x &= \frac{-T + D_{wing} - D_{body}}{m} \end{aligned} \quad (12)$$

Keterangan:

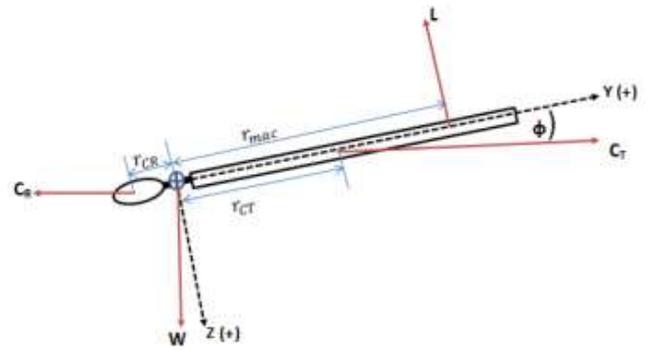
- $a_x$  = percepatan benda di arah sumbu x (m/s<sup>2</sup>)
- T = gaya dorong dari *motor + propeller* (N)
- $D_{wing}$  = gaya hambat sayap (N)
- $D_{body}$  = gaya hambat total *Fuselage* (N)

$$\begin{aligned} \sum M_{cg} &= I\ddot{\psi} \quad (+) \quad \zeta \\ Tr_{max} - D_{wing}r_{D_{wing}} - D_{body}r_{D_{body}} &= I\ddot{\psi} \\ \ddot{\psi} &= \frac{Tr_{max} - D_{wing}r_{D_{wing}} - D_{body}r_{D_{body}}}{I} \end{aligned} \quad (13)$$

Keterangan:

- $\ddot{\psi}$  = percepatan sudut *heading Monocopter* (rad/s<sup>2</sup>)
- r<sub>max</sub> = jarak antara cg *Monocopter* ke ujung sayap (m)
- r<sub>D<sub>wing</sub></sub> = jarak antara cg *Monocopter* ke titik tangkap gaya hambat di sayap (m)
- r<sub>D<sub>body</sub></sub> = jarak antara cg *Monocopter* ke titik tangkap gaya hambat di body (m)
- l = inersia *Monocopter* (m<sup>4</sup>)

Gaya dan momen yang terjadi pada panampang X dan Y benda mempengaruhi kecepatan angular *Monocopter*. Pada penelitian ini, diasumsikan keseimbangan pada bidang ini untuk setiap kecepatan sudut tertentu telah tercapai dengan mengatur defleksi *throttle* secara otomatis.



**Gambar 9.** Diagram Benda Bebas *Monocopter* pada Sumbu Y dan Z Benda

Sesuai dengan perjanjian tanda tata acuan koordinat benda untuk sumbu Y dan Z serta DBB tersebut, maka persamaan gaya dan momen *Monocopter* pada bidang Y – Z dapat dirumuskan sebagai berikut (merujuk pada DBB bidang Y – Z *Monocopter* gambar 9).

$$\begin{aligned} \sum F_y &= ma_y \rightarrow (+) \\ C_T \cos \phi - C_R \cos \phi - W \sin \phi &= ma_y \\ a_y &= \frac{C_T \cos \phi - C_R \cos \phi - W \sin \phi}{m} \end{aligned} \quad (13)$$

Keterangan:

- $C_T$  = gaya sentrifugal di dekat *tip* sayap (N)
- $C_R$  = gaya sentrifugal di dekat *root* sayap (N)
- W = gaya berat *Monocopter* (N)
- $\phi$  = sudut *coning* (deg)
- M = massa total *Monocopter* (kg)
- $a_y$  = percepatan benda di arah sumbu y (m/s<sup>2</sup>)

Persamaan gaya pada sumbu z benda dapat dirumuskan pula sebagai berikut (merujuk pada DBB bidang Y – Z *Monocopter* gambar 9),

$$\begin{aligned} \sum F_z &= ma_z \downarrow (+) \\ -L + W \cos \phi + C_T \sin \phi - C_R \sin \phi &= ma_z \\ a_z &= \frac{-L + W \cos \phi + C_T \sin \phi - C_R \sin \phi}{m} \end{aligned} \quad (14)$$

Keterangan:

- $C_T$  = gaya angkat sayap (N)
- $C_R$  = percepatan benda di arah sumbu z (m/s<sup>2</sup>)

Persamaan momen berpusat di *center of gravity* dirumuskan sebagai berikut (merujuk pada DBB bidang Y – Z *Monocopter* gambar 3.7).

$$\sum M_{cg} = I \ddot{\phi} (+) \cup$$

$$Lr_{mac} - C_T \sin \phi r_{ct} - C_R \sin \phi r_{cr} = I \ddot{\phi}$$

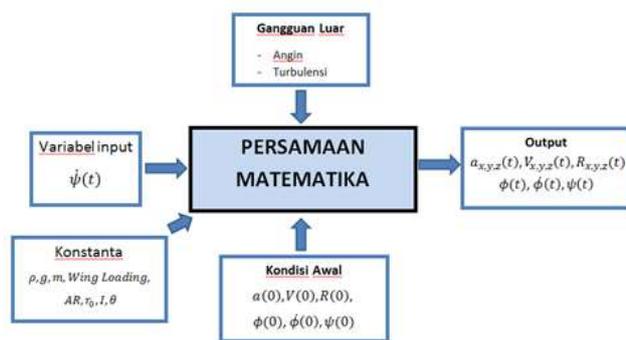
$$\ddot{\phi} = \frac{Lr_{mac} - C_T \sin \phi r_{ct} - C_R \sin \phi r_{cr}}{I} \quad (15)$$

Keterangan:

- r<sub>max</sub> = jarak antara cg dengan titik tangkap gaya angkat (m)  
 r<sub>ct</sub> = jarak antara cg dengan titik tangkap gaya sentrifugal di dekat *tip* (m)  
 r<sub>cr</sub> = jarak antara cg dengan titik tangkap gaya sentrifugal di dekat *root* (m)  
 I = momen inersia benda (m<sup>4</sup>)  
 $\ddot{\phi}$  = percepatan sudut *coning* (rad/s)

### Pemodelan Matematika Gerak Vertikal Monocopter

Penerapan pemodelan matematika pada pesawat udara dapat diterapkan pada wahana *Monocopter* dengan cara menambahkan parameter – parameter yang mempengaruhi gerak rotasi. Variabel – variabel pada pemodelan matematika dinamika terbang *Monocopter* terbagi menjadi beberapa kelompok yaitu variabel input, kondisi awal, gangguan, variabel output, dan konstanta. Ilustrasi pemodelan matematika *Monocopter* dapat dilihat di gambar berikut ini.



**Gambar 10.** Pemodelan Matematika Gerak Monocopter

Simulasi gerak yang akan dirancang untuk *Monocopter* terdiri dari gerak *hover*, *heave*, dan *descent*. Penambahan dan penurunan kecepatan putar *Monocopter* akan berdampak pada gaya angkat yang dihasilkan oleh sayap. Gaya angkat tersebut mempengaruhi gerak vertikal *Monocopter*. Jika gaya angkat lebih besar

dibandingkan dengan gaya berat *Monocopter*, maka wahana akan bergerak naik sehingga ketinggiannya bertambah. Jika gaya angkat lebih kecil dibandingkan dengan gaya berat *Monocopter*, maka wahana akan bergerak turun sehingga ketinggiannya berkurang.

Pada penelitian ini, simulasi gerak *Monocopter* dilakukan dengan memvariasikan kecepatan putar *Monocopter*. Kondisi terbang *Monocopter* saat *trim* adalah ketinggian terbang awal 1 meter dengan kecepatan terbang awal sebesar 0 m/s. Konfigurasi yang digunakan pada saat simulasi adalah massa *Monocopter* konstan dan distribusi massanya konstan sesuai dengan pemodelan. Variasi skenario simulasi gerak *Monocopter* dibagi menjadi tiga jenis skenario yaitu,

- **Skenario 1** adalah *Monocopter* melakukan fasa *hover* atau *holding*. Ketinggian terbang awal adalah satu meter dan *Monocopter* mempertahankan ketinggian tersebut selama 10 detik. Kecepatan putarnya diatur konstan selama durasi simulasi. Dari skenario ini, nilai kecepatan putar *Monocopter* pada kondisi *trim* akan diketahui.
- **Skenario 2** adalah *Monocopter* diberi *block* input. Kecepatan putar *Monocopter* mengalami perubahan selama durasi simulasi 10 detik. Tiga detik pertama, kecepatan putar berada pada kondisi *trim*, selama dua detik kecepatan putar dinaikan (untuk *block input up*) atau diturunkan (untuk *block input down*), kemudian dikembalikan ke kecepatan putar awal. Simulasi skenario kedua akan melihat respon *Monocopter* jika kecepatan putar ditambah dan dikurangi selama kurun waktu tertentu kemudian kembali ke kecepatan putar *trim*. Hasil yang diharapkan adalah perbedaan input kecepatan putar *Monocopter* baik dinaikan atau diturunkan akan mempengaruhi ketinggian terbang. Ketinggian *Monocopter* semakin bertambah dan semakin menurun kecepatan putarnya, ketinggian semakin berkurang.
- **Skenario 3** adalah *Monocopter* diberi input *doublet* yaitu menambah atau mengurangi kecepatan putar *Monocopter* dengan selisih kecepatannya sama.

Hasil simulasi merupakan representasi gerak titik pusat massa *Monocopter* saat terbang. Output yang dihasilkan berupa grafik dalam bidang *Cartesian* dua dimensi dan tiga dimensi.

### Fasa Terbang *Hover* Kondisi *Trim* (Skenario 1)

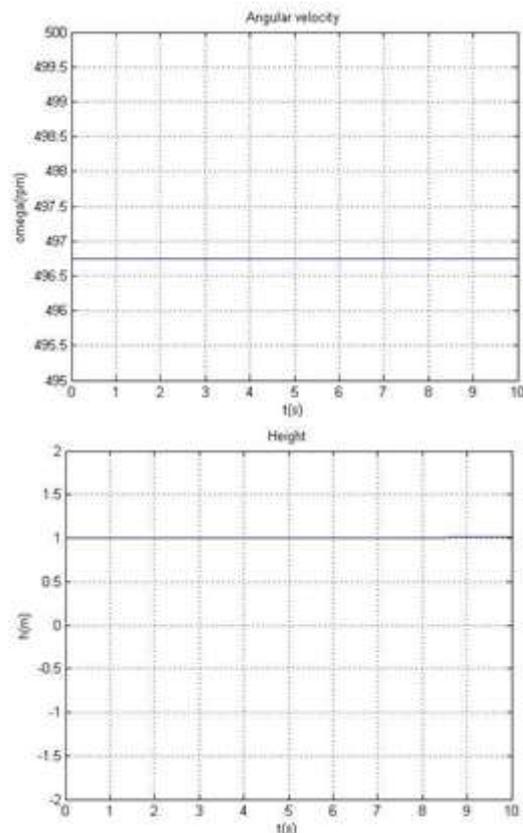
Fasa terbang *hover Monocopter* terjadi ketika ketinggian terbang dipertahankan pada batas waktu tertentu. Kondisi terbang *Monocopter* pada saat *trim* adalah,

- ketinggian awal *Monocopter* 1 meter,
- ketinggian *Monocopter* diharapkan konstan,
- sudut serang diasumsikan konstan sebesar 3 derajat pada saat kondisi *trim*.

Konfigurasi *Monocopter* pada kondisi *trim* diasumsikan bahwa massa *Monocopter* tetap dan posisi titik pusat massa *Monocopter* terhadap sumbu X dan Y konstan. Durasi simulasi untuk skenario pertama dilakukan selama 10 detik.

Pada simulasi ini, tidak ada perubahan input sehingga kecepatan putar bernilai konstan. Kecepatan putar konstan akan menghasilkan posisi yang konstan. Ketinggian terbang *Monocopter* dapat diketahui dari posisi titik massa *Monocopter* arah sumbu Z tata acuan koordinat inersia. Pada TAK inersia, sumbu Z positif mengarah ke bawah sedangkan untuk menghitung ketinggian, sumbu Z positif mengarah keatas. Karena adanya perbedaan perjanjian tanda tersebut, ketinggian *Monocopter* diperoleh dari mengalikan posisi titik massa arah sumbu Z TAK inersia dengan tanda negative.

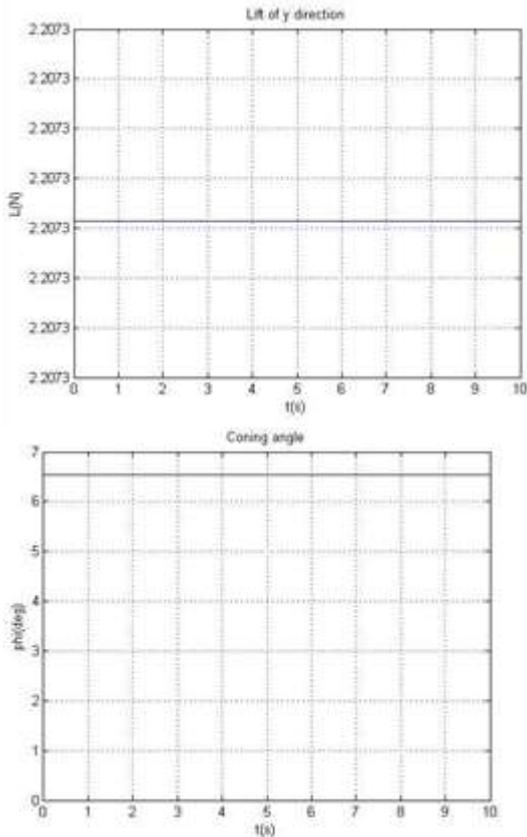
Pada kondisi *trim* ini, ketinggian *Monocopter* dapat dipertahankan dalam jangka waktu tertentu. Perubahan ketinggiannya kecil sehingga posisi *Monocopter* arah sumbu z inersia dianggap konstan.



**Gambar 11.** Grafik Kecepatan Putar dan Ketinggian *Monocopter* Fasa Terbang *Hover*

Hasil simulasi skenario pertama diperoleh kecepatan putar *Monocopter* pada kondisi *trim* sebesar 496,75 rpm. Batasan pemodelan matematika pada penelitian ini adalah perhitungan posisi dilakukan dimulai pada suatu ketinggian tertentu ( $h \neq 0$  m). Pergerakan *Monocopter* dari titik pusat tata acuan koordinat inersia sampai pada ketinggian tertentu tidak dimodelkan. Dengan batasan tersebut pada pemodelan matematika yang dibuat pada penelitian ini, kecepatan putar *Monocopter* pada fasa terbang *hover* akan bernilai sama pada berbagai ketinggian awal.

Nilai konstan kecepatan putar *Monocopter* akan menghasilkan nilai gaya angkat dan sudut *coning* konstan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa gaya angkat yang dihasilkan pada kondisi *trim* sebesar 2,2073 N konstan sepanjang simulasi berlangsung. Nilai gaya angkat *Monocopter* pada kondisi *trim* sama dengan gaya beratnya. Grafik nilai gaya angkat pada simulasi kondisi *trim* dapat dilihat pada gambar 12 berikut ini

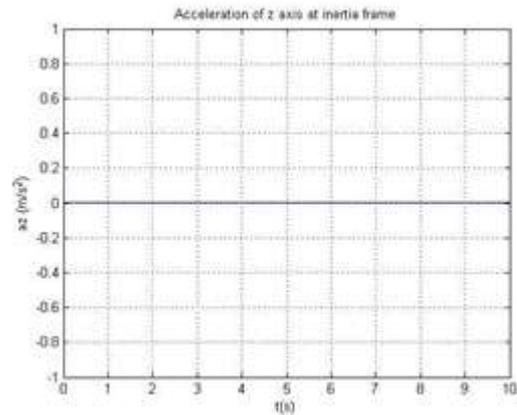


**Gambar 12.** Grafik Gaya Angkat dan Sudut Coning Monocopter pada Kondisi Trim

Hasil simulasi menunjukkan pula nilai sudut *coning* konstan selama simulasi berlangsung. Seluruh persamaan gerak yang digunakan pada simulasi merupakan fungsi dari sudut *coning* sehingga perhitungan nilainya diperoleh dari proses iterasi. Kondisi awal sudut *coning Monocopter* ditentukan sebesar 0 derajat. Besarnya sudut *coning* berubah signifikan pada beberapa step perhitungan sebelum mencapai nilai konstan. Perubahan nilai tersebut terjadi sangat cepat. Nilai konstan sudut *coning* pada kondisi *trim* adalah 6,53 derajat. Grafik nilai sudut *coning Monocopter* pada simulasi kondisi *trim* dapat dilihat pada gambar 4.6 dan grafik perubahan sudut *coning* dari 0 derajat sampai kondisi konstan dapat dilihat secara mikro pada grafik di lampiran C.

Gerak vertikal *Monocopter* dipengaruhi oleh percepatan titik Massa *Monocopter* pada tata acuan koordinat inersia. Pada saat kondisi *trim*, percepatan arah vertikal *Monocopter* sangat kecil yaitu  $0,00016 \text{ m/s}^2$  sehingga dapat dikatakan percepatannya konstan sama dengan nol. Grafik nilai percepatan vertikal *Monocopter*

dapat dilihat dari gambar 13 berikut ini.



**Gambar 13.** Grafik Percepatan Vertikal Monocopter pada Kondisi Trim

Kesimpulan dari hasil simulasi skenario ini adalah tidak ada input perubahan kecepatan putar sehingga tidak ada respon perubahan ketinggian *Monocopter*. Pada penelitian selanjutnya, pemodelan matematika dibuat dari kondisi diam di titik pusat tata acuan koordinat inersia, *take – off* untuk memperoleh ketinggian, fasa *hover* di ketinggian tertentu, melakukan fasa *heave* dan *descent*, lalu melakukan landing.

**Block Input (Skenario 2)**

Skenario kedua dirancang untuk melihat respon *Monocopter* terhadap perubahan input tiba – tiba dan kembali ke kondisi *trim*. Skenario ini terdiri dari dua jenis yaitu *block input up* dan *block down*. Kondisi terbang *Monocopter* untuk simulasi skenario kedua ini adalah,

- ketinggian awal *Monocopter* 1 meter ketinggian *Monocopter* diharapkan berubah (bertambah atau berkurang) setelah input diubah,
- sudut serang diasumsikan konstan pada kondisi *trim* 3 derajat.

Konfigurasi *Monocopter* pada kondisi *trim* diasumsikan massa *Monocopter* tetap dan posisi titik pusat massa *Monocopter* terhadap sumbu X dan Y konstan. Durasi simulasi untuk skenario pertama dilakukan selama 10 detik.

Kecepatan putar awal sebesar 496,75 rpm (kondisi *trim*) akan diatur pada tiga detik

pertama. Dua detik selanjutnya, kecepatan putar akan ditambah (*block input up*) dan dikurangi (*block input down*) dan kembali ke kecepatan putar kondisi *trim*. Output yang dihasilkan adalah *Monocopter* akan mengalami perubahan ketinggian. Ketinggian *Monocopter* bertambah ketika diberikan input up dan ketinggian berkurang jika *Monocopter* diberi input down.

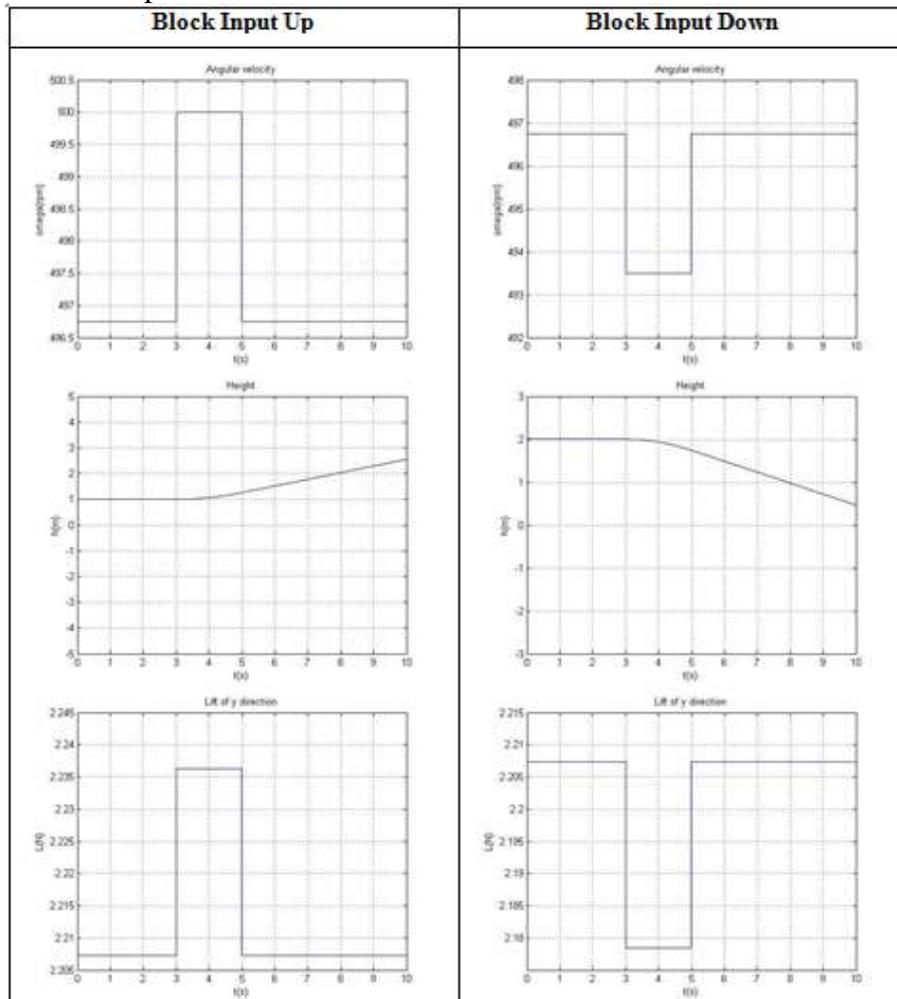
Perubahan input kecepatan putar *Monocopter* akan menghasilkan perubahan nilai gaya angkat dan sudut *coning Monocopter*. Nilai gaya angkat dan sudut *coning Monocopter* berubah pada durasi yang sama dengan perubahan kecepatan putar. Sudut *coning* mengalami kenaikan seiring dengan naiknya gaya angkat meskipun kenaikannya sangat kecil.

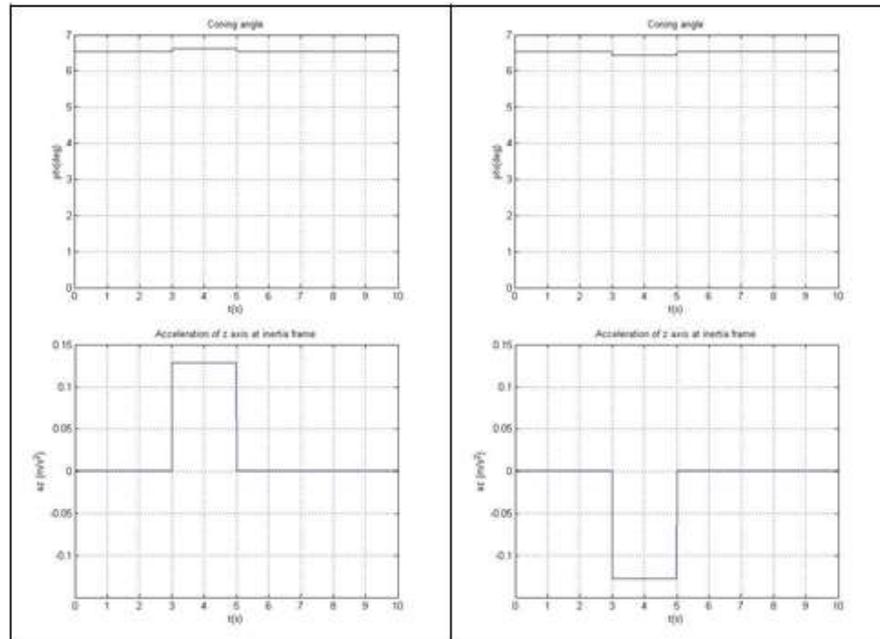
Gerak vertikal *Monocopter* dipengaruhi oleh percepatan titik Massa *Monocopter* pada tata acuan koordinat inersia. Pada saat simulasi ini,

percepatan arah vertikal *Monocopter* mengalami perubahan pada durasi yang sama dengan perubahan kecepatan putar, gaya angkat dan sudut *coning*. Percepatan arah vertikal ini menyebabkan *Monocopter* mengalami perubahan ketinggian. Peningkatan percepatan vertikal *Monocopter* menyebabkan *Monocopter* naik. Meskipun nilai percepatan vertikal *Monocopter* kembali  $0 \text{ m/s}^2$  sampai akhir simulasi, nilai kecepatan *Monocopter* tidak sama dengan nol sehingga posisi *Monocopter* akan bertambah seiring dengan adanya kecepatan arah vertikal.

Kesimpulan dari simulasi ini adalah input perubahan kecepatan putar *Monocopter* berupa input *block down*. Ketinggian *Monocopter* berkurang hingga mencapai 0,43 meter pada akhir durasi simulasi. Selisih perubahan ketinggian ini sama dengan hasil simulasi input *block up* yaitu sebesar 1,55 meter.

**Tabel 1.** Grafik Perubahan Kecepatan Putar, Ketinggian, Gaya Angkat, Sudut Coning, dan Percepatan *Monocopter* untuk Block Input





### Input Doublet (Skenario 3)

Skenario ketiga membahas mengenai respon *Monocopter* ketika kecepatan putar diberi variasi input *doublet* dimana kecepatan putar *Monocopter* dinaikan dan diturunkan (atau sebaliknya) dengan selisih yang sama dan kembali ke kondisi *trim*. Input *doublet* terbagi menjadi dua jenis yaitu *doublet up-down* dan *doublet down up*. Kondisi terbang *Monocopter* untuk simulasi skenario kedua ini adalah,

- ketinggian awal *Monocopter* 1 meter,
- ketinggian *Monocopter* diharapkan berubah (bertambah atau berkurang) setelah input diubah,
- sudut serang diasumsikan konstan pada kondisi *trim* 3 derajat.

Konfigurasi *Monocopter* pada kondisi *trim* diasumsikan massa *Monocopter* tetap dan posisi titik pusat massa *Monocopter* terhadap sumbu X dan Y konstan.

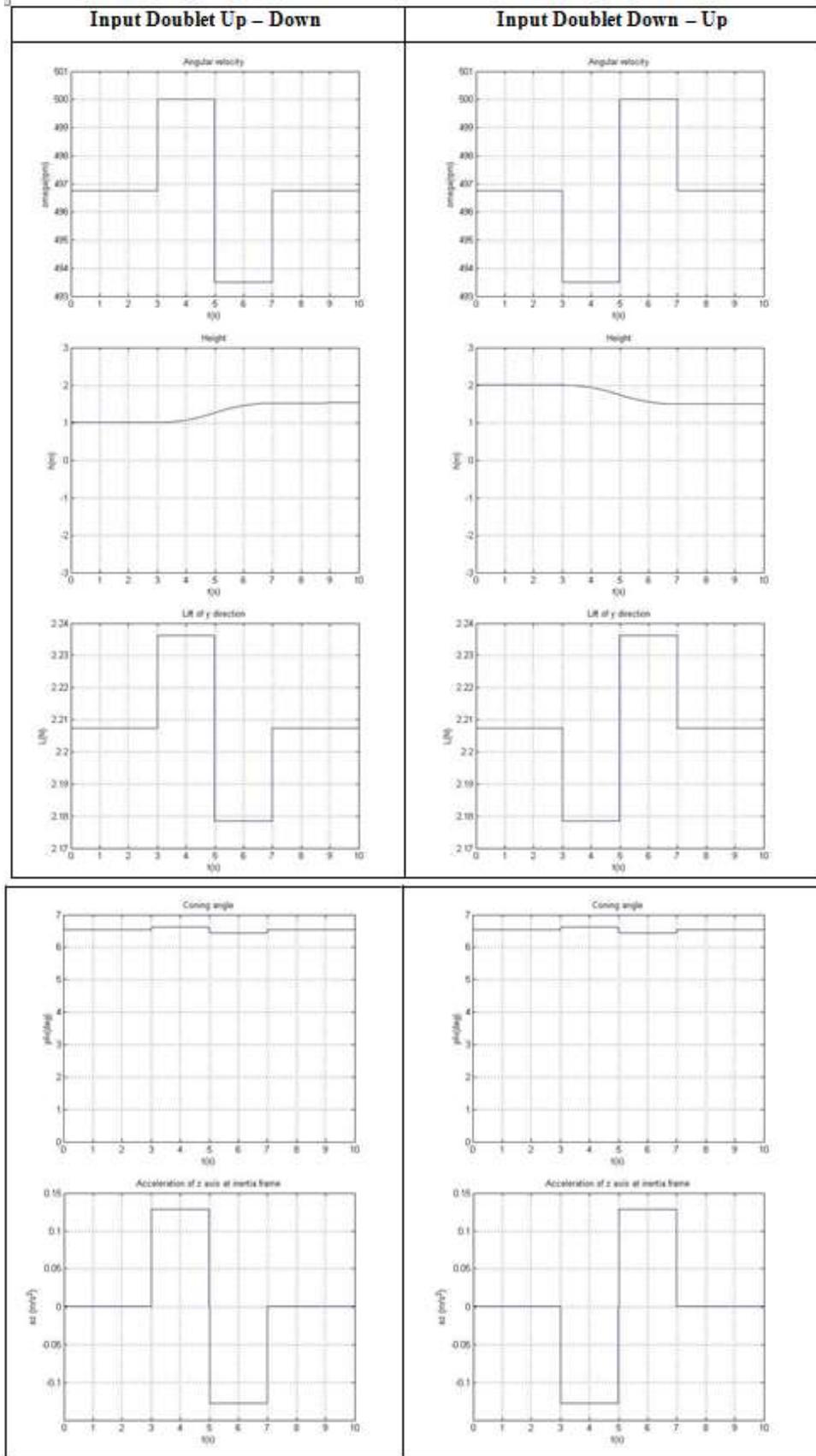
Durasi simulasi ditentukan selama 10 detik. Kenaikan dan penurunan kecepatan sudut *Monocopter* ditentukan 500 rpm dan 493,5 rpm untuk kedua skenario. Ketinggian awal *Monocopter* adalah satu meter dengan sudut serang diasumsikan konstan pada kondisi *trim* tiga derajat. Output yang diharapkan adalah *Monocopter* akan mengalami perubahan

ketinggian dari kondisi seimbang satu ke kondisi seimbang lainnya.

*Monocopter* mengalami penambahan ketinggian hingga mencapai 1,52 meter karena kecepatan putarnya bertambah dan mempertahankan posisinya sampai beberapa waktu pada ketinggian tersebut. Fenomena unik dari hasil simulasi dengan input *doublet* adalah *Monocopter* dapat menambah atau mengurangi ketinggiannya dan mempertahankan ketinggian tersebut jika input yang diberikan berubah secara signifikan dengan selisih antara kecepatan putar *Monocopter* maksimum dengan kecepatan putar kondisi *trim* sama. Hal ini terjadi karena gaya dan percepatan yang dihasilkan *Monocopter* saat menambah ketinggian pada kecepatan putar 500 rpm dapat ditahan dengan besar gaya dan perlambatan yang sama pada kecepatan putar 493,5 rpm begitu pula sebaliknya.

Percepatan arah vertikal menyebabkan *Monocopter* mengalami perubahan ketinggian. Ketinggian *Monocopter* bertambah setelah mengalami penambahan kecepatan putar. *Monocopter* dapat mempertahankan posisinya pada ketinggian tersebut setelah mendapatkan energi yang cukup untuk menahan gerak vertikalnya dari penurunan kecepatan putar *Monocopter*

**Tabel 2.** Grafik Perubahan Kecepatan Putar, Ketinggian, Gaya Angkat, Sudut Coning, dan Percepatan Monocopter untuk Input Doublet



## Kesimpulan

Kesimpulan dari simulasi ini adalah input kecepatan *doublet Monocopter* berupa *doublet up – down*. Perubahan kecepatan putar ini menyebabkan ketinggian *Monocopter* bertambah hingga mencapai 1,52 meter dan *Monocopter* mempertahankan ketinggian tersebut sampai akhir simulasi. Input kecepatan *doublet Monocopter* berupa *doublet down – up*. Perubahan kecepatan putar ini menyebabkan ketinggian *Monocopter* berkurang hingga mencapai 1,49 meter dan *Monocopter* mempertahankan ketinggian tersebut sampai akhir simulasi.

## Kesimpulan

Penelitian ini telah menghasilkan pemodelan matematika dinamika terbang *Monocopter* dengan menggunakan program *Matlab*. Desain *Monocopter* yang dijadikan acuan adalah MC – 11. Proses yang dilakukan untuk memperoleh pemodelan matematika dinamika terbang *Monocopter* adalah peninjauan ulang desain, penentuan tata acuan koordinat dan orientasi, penurunan persamaan gerak *Monocopter*, penyusunan algoritma dan simulasi gerak *Monocopter*. Untuk kebutuhan pemodelan, konfigurasi MC – 11 disederhanakan dengan dua pusat massa dengan massa terdistribusi sepanjang garis <25% MAC sayap.

Persamaan gaya dan momen gerak *Monocopter* telah disusun dengan peninjauan dari bidang Cartesian sumbu x, y, dan z. Seluruh persamaan gaya dan momen *Monocopter* merupakan fungsi dari sudut *coning*. Penerapan persamaan gerak yang digunakan untuk simulasi disesuaikan dengan batasan masalah yang telah ditetapkan pada bagian pendahuluan.

Algoritma dibuat untuk membantu peneliti menyusun tahap pemodelan matematika yang dibuat pada *Matlab*. Seluruh persamaan yang telah diperoleh sebelumnya digunakan untuk mengiterasi output pemodelan. Output yang dihasilkan berupa percepatan, kecepatan, dan posisi *Monocopter* pada tata acuan koordinat benda dan inersia. Output direpresentasikan dengan grafik.

Validasi pemodelan dilakukan dengan menyusun lima skenario terbang *Monocopter*. Hasil yang ingin dicapai adalah pengaruh kecepatan putar *Monocopter* memberikan respon yang benar. Dari hasil simulasi gerak, hal yang dapat disimpulkan adalah sebagai berikut,

- Kondisi *trim Monocopter* dapat dicapai jika kecepatan putarnya 496,75 rpm dan tidak ada perubahan input kecepatan putar.
- Input block pada simulasi dapat menggambarkan perubahan ketinggian *Monocopter* terhadap perubahan kecepatan putar.
- Untuk simulasi gerak berupa ketinggian *Monocopter* berubah dan *Monocopter* dapat mempertahankan ketinggian tersebut, input kecepatan putarnya dibuat menyerupai *doublet* dimana perubahan kecepatan putarnya diubah secara signifikan. Selisih antara perubahan kecepatan putar minimum atau maksimumnya dengan kecepatan putar kondisi *trim* sama.

Simulasi gerak menyimpulkan bahwa pemodelan matematika telah menghasilkan respon yang benar.

## REFERENSI

- [1] Bones, E., and Bolkom, C., 2003, Unmanned Aerial Vehicle: Background and Issues for Congress, <http://www.fas.org/irp/crs/RL31872.pdf>, 25 April 2003, diakses 13 September 2013.
- [2] Gertler, J., 2012, U.S. Unmanned Aerial Systems, <http://www.fas.org/sgp/crs/natsec/R42136.pdf>, 3 Januari 2012 diakses 13 September 2013.
- [3] Pratama, H.A., 2012, Studi Konsep dan Rancang Bangun Wahana *Monocopter* Tanpa Awak MC-11, *Tugas Akhir*, Fakultas Teknik Mesin dan Dirgantara, Institut Teknologi Bandung, Bandung.
- [4] Kellas, A., 2005, The Guided Samara: Design and Development of a Controllable Single-bladed Autorotating Vehicle, *Tesis*, Departement of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of

- Technology, Massachusetts.
- [5] Mulyanto, T., 2013, Preliminary Development of Monocopter UAV, *Regional Conference on Mechanical and Aerospace Technology*, Bangkok.
- [6] Fregene, K. et al, 2008, *Autonomous Guidance and Control of a Biomimetic Single-Wing MAV*, Lockheed Martin Advanced Technology Laboratory, Cherry Hill.
- [7] Jameson, S., 2008, *SAMARAI Nano Air Vehicle - A Revolution in Flight*, Lockheed Martin Advanced Technology Laboratory, Cherry Hill.
- [8] Bakula, M., et al, 2008, *A Natural Evolution in FLight: The Design and Development of the SamarEye System, A Method for Searching Closed Quarter Environments*, Embry-Riddle Aeronautical University, Florida.
- [9] Ulrich, E.R., Pines, D.J., and Gerardi, S., 2009, *Autonomous FLight of a Samara MAV*, Departement of Aerospace Engineering, University of Maryland, Texas.
- [10] Roskam, Jan, 1985, *Airplane Design Part I: Preliminary Sizing of Airplanes*, Roskam Aviation and Engineering Corporation, Ottawa.
- ] Jenie, S.D., Muhammad, Hari, 2004, *Diktat Kuliah PN3233 Dinamika Terbang 1*, Institut Teknologi Bandung, Bandung.
- [12] Meriam, J.L., Kraige, L., 1987, *Engineering Mechanics Static Volume I 2nd Edition*, John Wiley & Sons, Inc, Hoboken.
- [13] Purcell, E.J., Varberg, D., 1987, *Calculus With Analytic Geometry, 5th Edition*, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- [14] Giancolli, D., 2005, *Physics : Principles and Applications 6 Edition*, Pearson Prentice Hall, New Jersey.
- [15] Sembiring, J., et al, 2013, *Modul Pelatihan Matlab*, Institut Teknologi Bandung, Bandung.
- [16] Sankar, L., 1996, Wind Engineering Module 4.1 Blade Element Theory, <http://www.ae.gatech.edu/community/staff/bio/sankar-l/>, 7 April 1996, diakses 22 Maret 2013.
- [17] Cavcar, M., 2004, Blade Element Theory, <http://www.anadolu.edu.tr>, diakses 22 Maret 2013,
- [18] Ruijgrok, G., 1994, *Elements of Airplane Performance*, Delft University Press, Rotterdam.