

Kaji Keefektifan Penggunaan Struktur Batang dalam Menghitung Lendutan Struktur *Shell* Kontinum

Eka Satria^{1,*}, Shiro Kato²

¹Jurusan Teknik Mesin Universitas Andalas Padang, Indonesia

*ekasatria@ft.unand.ac.id

²Toyohashi University of Technology, Jepang

Abstrak

Dewasa ini, sangat banyak struktur bangunan berbentuk *shell* yang dibangun untuk berbagai tujuan. Alasan utamanya adalah karena keindahan tampilan dari struktur tersebut. Dalam perancangan, biasanya struktur ini dimodelkan dengan menggunakan elemen *shell* untuk mendapatkan hasil dengan akurasi yang lebih baik. Hanya saja pemodelan dengan menggunakan elemen *shell* membutuhkan konsep dan analisis matematika yang cukup rumit bagi para praktisi kebanyakan. Sebagai solusi, makalah ini memperkenalkan suatu teknik pendekatan tentang bagaimana suatu struktur *shell* kontinum dimodelkan dengan elemen batang. Elemen batang sendiri adalah suatu elemen yang paling sederhana dalam konsep komputasi struktur yang lebih mudah dimengerti dan juga lebih mudah dijadikan program komputasi. Hasil akhir menunjukkan tingkat akurasi rata-rata teknik pendekatan ini dalam menghitung lendutan suatu struktur *shell* kontinum adalah sekitar 75% ketika dibandingkan dengan program komputasi berbasis metode elemen hingga yang menggunakan elemen solid.

Kata kunci : *Shell* Kontinum, Elemen Batang, Lendutan, Metode Elemen Hingga

1. Pendahuluan

Kemampuan elemen *shell* dalam memodelkan bentuk-bentuk struktur dengan bentuk geometri yang memiliki banyak kelengkungan menjadi elemen *shell* sangat populer untuk digunakan dibandingkan dengan jenis elemen lainnya. Berbagai teori tentang elemen ini terus berkembang sampai sekarang. Model-model elemen *shell* juga telah diperkenalkan dari bentuk yang paling sederhana sampai bentuk yang rumit, dari bentuk dua dimensi ke bentuk tiga dimensi, penggunaan elemen satu *layer* sampai multi *layer*, dari elemen yang menggunakan orde rendah sampai tinggi dan seterusnya.

Meskipun elemen *shell* ini terbukti mampu memodelkan bentuk-bentuk geometri yang sulit dan juga mampu diaplikasikan ke dalam program komputasi berbasis elemen hingga, akan tetapi

konsep matematika yang menyertai elemen ini seringkali menjadi kendala utama bagi para praktisi. Persamaan matematika yang dibutuhkan cukup rumit sehingga pengembangan model ini hanya dilakukan oleh kalangan terbatas.

Di sisi lain, keberadaan elemen batang yang merupakan elemen yang paling sederhana untuk dipahami dan sangat mudah diterapkan ke dalam program komputasi sangatlah populer. Jika penggunaan elemen batang ini dapat diterapkan ke bentuk-bentuk geometri struktur kontinum yang sulit seperti *shell*, hal ini akan sangat membantu para praktisi dalam memahami karakteristik umum dari struktur *shell* kontinum yang diamati. Sayangnya sejauh ini, belum ada referensi yang memperlihatkan pengembangan yang dilakukan untuk memodelkan bentuk

struktur *shell* kontinum dengan memanfaatkan elemen batang.

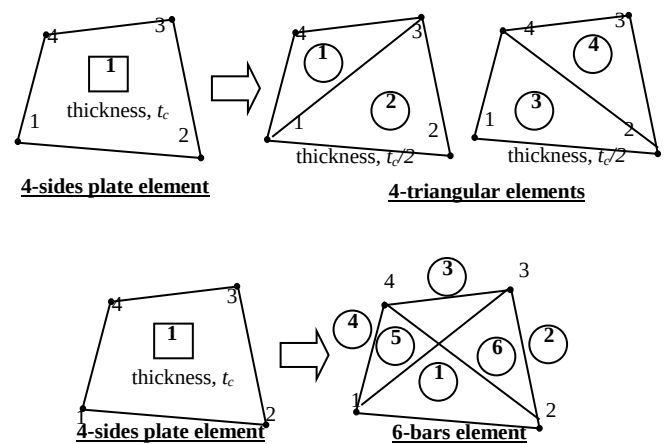
Tujuan dari makalah ini adalah memperkenalkan suatu metode pendekatan dalam memodelkan suatu struktur *shell* kontinum dengan memanfaatkan elemen batang yang sederhana.

2. Konsep Dasar Metode Pendekatan^{1,2}

Struktur *shell* kontinum pada awalnya dimodelkan dengan elemen pelat segi empat yang memiliki ketebalan t_c . Kemudian, elemen pelat segi empat ini dibagi menjadi 4 buah elemen pelat segitiga yang memiliki ketebalan yang sama sebesar $t_c/2$ (Gambar 1a). Di sisi lain, elemen pelat segi empat ini juga didekati dengan 6 buah elemen batang yang disusun seperti ditunjukkan Gambar 1b. Matrik kekakuan dari elemen-elemen batang ini dapat disusun dengan mudah, hanya saja dengan harga luas penampang yang belum diketahui. Dengan menggunakan asumsi pendekatan bahwa matriks kekakuan total 4 buah elemen pelat segitiga sama dengan matrik kekakuan total 6 buah elemen batang, maka luas 6 buah penampang untuk elemen batang dapat didekati.

2.1. Elemen Pelat

Sebagaimana yang diperlihatkan Gambar 1a, satu buah elemen pelat segi empat dengan ketebalan t_c (nomor nodal 1-2-3-4) didekati dengan empat buah pelat segi tiga dengan ketebalan $t_c/2$ dan luas area S_c (lihat elemen-elemen dengan nomor nodal 1-3-4, 1-2-3, 1-2-4, and 2-3-4).



Gambar.1 Satu buah elemen pelat segi empat didekati dengan (a).4 buah elemen pelat segi tiga (atas), dan (b).6 buah elemen batang (bawah)

Matrik kekakuan untuk elemen pelat segi empat ini merupakan jumlah total dari 4 buah matrik kekakuan elemen segi tiga seperti yang diberikan oleh Pers.(1).

$$[K_{TOTAL,plate}] = \sum_{j=1}^4 [F_j^{-1}]^T \times [B_j] \times [F_j^{-1}] \quad \dots (1)$$

$$\text{dimana } [F_j] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}_j \quad \text{dan}$$

$$[B] = \left(\frac{t_c}{2} \right) \cdot S_{cj} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_c & 0 & 0 & 0 & \nu E_c \\ 0 & 0 & G_c & 0 & G_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_c & 0 & G_c & 0 \\ 0 & \nu E_c & 0 & 0 & 0 & E_c \end{bmatrix}$$

Sementara notasi j melambangkan jumlah elemen pelat segi tiga yang mewakili satu elemen pelat segi empat.

2.2. Elemen Batang

Sebagaimana yang diperlihatkan oleh Gambar.1b, elemen pelat segi empat didekati dengan enam buah elemen batang yang menghubungkan nomor-nomor nodal berikut ini: 1-2, 2-3, 3-4, 4-1, 1-3 and 2-4. Matrik kekakuan dari setiap batang dapat

dihitung dengan menggunakan Pers.(2) berikut ini.

$$[K_t] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c.c & c.s & -c.c & -c.s \\ c.s & s.s & -c.s & -s.s \\ -c.c & -c.s & c.c & c.s \\ -c.c & -s.s & c.s & c.c \end{bmatrix} \quad \dots (2)$$

dimana $A = b \times t_c$ dan $c = \cos \theta$ dan $s = \sin \theta$. Matrik kekakuan total dari enam elemen batang ini dihitung dengan menggunakan Pers.(3) berikut:

$$[K_{TOT,BAR}] = t_c (B_1[K_{t1}] + B_2[K_{t2}] + \dots + B_6[K_{t6}]) \quad \dots (3)$$

dimana B_i dan $[K_{ti}]$ adalah lebar dari penampang dan matrik kekakuan dari elemen batang ke- i dalam Pers.(2).

2.3. Penghitungan Luas Penampang Ekuivalen

Luas penampang ekuivalen (A_l sampai A_6) dapat didekati dengan menggunakan persamaan pendekatan

$$[K_{TOTAL,plate}] = [K_{TOT,BAR}] \quad \dots (4)$$

Kesalahan penghitungan dihitung dari selisih diantara kedua matriks kekakuan total tersebut. Kesalahan diminimalkan dengan menggunakan kriteria minimax [3] sebagaimana dijelaskan oleh Pers.(5) berikut:

$$V_{min} = \left[[K_{TOTAL,plate}] - [K_{TOT,BAR}] \right]^2 \quad \dots (5)$$

kemudian dengan menggunakan diferensiasi harga $\frac{\partial V_{min}}{\partial A_k} = 0$ akan diperoleh harga penampang ke enam batang.

2.4. Sistem Koordinat

Satu hal yang harus diperhatikan adalah seluruh luas penampang pendekatan dihitung ketika elemen berada dalam sistem koordinat lokal. Oleh karena itu, suatu sistem transformasi dibutuhkan untuk mengubah sistem elemen pelat segi tiga dari koordinat global menuju koordinat lokal.

3. Kasus dan Pembahasan

3.1. Struktur Pelat Datar

Bab ini ditujukan untuk memverifikasi keefektifan metode pendekatan yang telah diperkenalkan pada bab sebelumnya. Seperti diberikan oleh Gambar 2, suatu model sederhana berbentuk struktur pelat datar digunakan sebagai contoh. Dimensi pelat yang digunakan $10000mm \times 10000mm$ dengan jumlah meshing sebanyak $n \times m$. Beberapa jenis tumpuan sebagaimana terlihat pada Tabel.1 digunakan dalam perhitungan. Material pelat diasumsikan terbuat dari beton dengan elastisitas $E = 20 \text{ kN/mm}^2$ dan rasio *poison* 0.5. Proses verifikasi dibatasi hanya untuk mendapatkan besarnya deformasi dari nodal-nodal pelat yang nantinya akan diperbandingkan dengan perhitungan melalui penerapan metode elemen hingga.

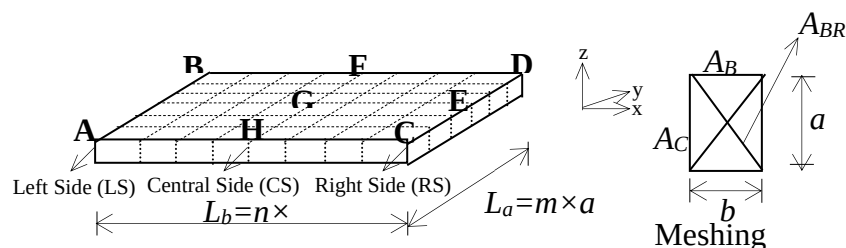
Tabel 2 memperlihatkan perbandingan antara luas penampang batang hasil penghitungan dengan metode pendekatan yang dikembangkan dalam variasi ukuran meshing. Tabel 3 memperlihatkan perbandingan lendutan nodal maksimum dari struktur batang dengan luas penampang batang diperoleh melalui metode pendekatan dengan lendutan nodal maksimum secara teoritis.

Beberapa hal penting yang bisa disimpulkan adalah sebagai berikut:

1. Untuk model-1 dan model-2 yang menggambarkan kasus *out-of-plane bending* (OPB), keakuratan hasil lendutan diberikan oleh ukuran *meshing* $a/b=2$ (rata-rata 0.93), kemudian diikuti oleh ukuran *meshing* $a/b=1$ (rata-rata 0.76), dan terakhir $a/b=1/2$ (rata-rata 0.45). Untuk model-4 yang menggambarkan kasus *in-plane bending* (IPB), keakuratan hasil lendutan diberikan oleh, berturut-turut dari yang terbaik, $a/b=1$ (rata-rata 1.), $a/b=1/2$ (0.9) dan $a/b=2$ (1.3). Untuk kasus beban aksial, diberikan oleh model-3, pola keakuratan hasil hampir mirip

- dengan kasus OPB, dimana keakuratan yang paling baik diberikan oleh ukuran *meshing* $a/b=2$ (0.94), diikuti $a/b=1$ (0.77) dan $a/b=1/2$ (0.44). Untuk model dengan tumpuan diberikan di seluruh sisi, seperti diperlihatkan oleh Model-5, akurasi hasil terbaik diberikan oleh ukuran *meshing* $a/b=1$ (0.89), diikuti oleh $a/b=2$ dan $a/b=1/2$.
2. Dari poin-1 diatas, dapat disimpulkan bahwa pemilihan tipe *meshing* sangat erat kaitannya dengan tipe kondisi batas dari model. Ketika model hanya ditumpu pada bagian sisi kiri dan kanan (bukan tipe tertutup) seperti yang diberikan oleh model-1 sampai dengan model-4, bentuk *meshing* terbaik diberikan dengan memperkecil ukuran panjang *meshing* pada sisi yang bebas dari tumpuan (lihat ukuran *meshing* $a/b=2$). Ketika model ditumpu pada seluruh sisi model (tipe tertutup), bentuk *meshing* terbaik diberikan oleh ukuran mesh $a/b=1$.
 3. Dari hubungan lendutan yang dihasilkan dengan luas penampang tiap batang, beberapa hal penting dinyatakan sebagai berikut: (i) Luas penampang terbesar untuk batang *bracing*, A_{BR} , diberikan hanya ketika ukuran mesh $a/b=1$, (ii) Peningkatan ukuran sisi *meshing*, sebagai contoh pada ketinggian *mesh*, “a” atau lebar *mesh*, “b”, berdampak dengan menurunnya luas penampang batang A_B atau A_C . (iii) Disamping harga luas penampang, lendutan yang diperoleh juga erat kaitannya dengan jenis tumpuan yang diberikan kepada model. Untuk model-1 dan -2, kekakuan model akan lebih besar dalam arah

sumbu-x akibat pengaruh pemberian tumpuan disisi kiri dan kanan model dan akan lebih kecil dalam arah sumbu-y karena tidak ada tumpuan diberikan dalam arah tersebut. Jika ukuran mesh yang digunakan $a/b=2$, berarti harga $b < a$, oleh karena itu luas penampang A_B akan bertambah dan sebaliknya A_C akan berkurang. Akibatnya defleksi dalam arah sumbu-z akan menjadi lebih besar (1.12 mm pada Tabel 3) karena kekakuan struktur dalam arah-y tetap kecil. Sebaliknya jika ukuran *mesh* yang digunakan $a/b=1/2$, berarti harga $a < b$, akan menyebabkan luas penampang A_C meningkat, sehingga kekakuan dalam arah sumbu-y juga meningkat. Hal ini akan memperkecil defleksi yang terjadi (0.43 mm pada Tabel 3). (iv) Untuk kasus aksial, diperlihatkan oleh Model-3, dengan alasan yang sama dengan OPB, ukuran *mesh* $a/b=2$ akan memberikan harga defleksi dalam arah sumbu-x lebih besar daripada ukuran *mesh* $a/b=1/2$. (v) Untuk kasus IPB, diberikan oleh model-4, defleksi terbesar dalam arah sumbu-y akan diberikan oleh ukuran *mesh* $a/b=1/2$, karena harga A_B akan lebih kecil sedangkan harga A_C akan besar. Sebaliknya defleksi akan kecil pada ukuran *mesh* $a/b=2$, karena harga A_B akan besar sedangkan A_C akan kecil. (vi) Untuk model-5 dimana kekakuan struktur sama dalam arah sumbu-x dan -y, ukuran *mesh* $a/b=1$, akan memberikan hasil defleksi terbaik dibandingkan ukuran mesh lainnya.



Gambar.2 Struktur pelat datar dan bentuk meshing

Table 1. Variasi Model yang Digunakan

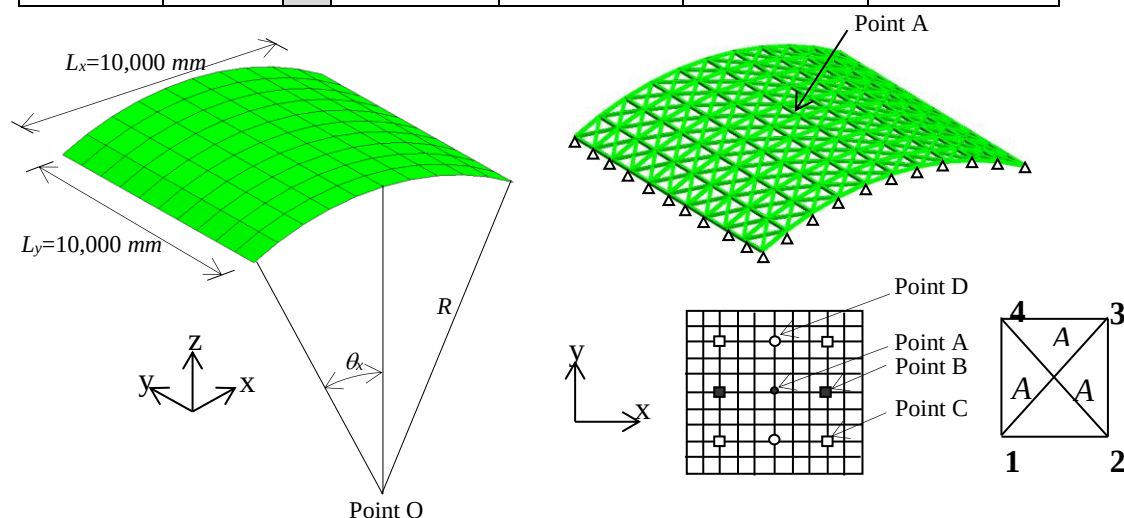
Cases	Left Side	Right Side	Load Condition	Type of Load
Model 1	Simply Supported	Simply Supported	1. Z-Line Load on Central Side 2. Z-Uniform Load	Out-of-Plane Bending (OPB)
Model 2	Clamped	Free	1. Z-Line Load on Right Side 2. Z-Uniform Load	Out-of-Plane Bending (OPB)
Model 3	Clamped	Free	1. X-Line Load on Right Side	Axial Loading
Model 4	Clamped	Free	1. Y-Line Load on Right Side	In-Plane Bending (IPB)
Model 5	All Sides are Restrained		1. Z-Uniform Load	Out-of-Plane Bending (OPB)

Tabel 2. Hasil Penghitungan Luas Penampang Batang

Area	Replacement Method (RM)		
	$m \times n = 10 \times 10$ ($a/b=1$)	$m \times n = 20 \times 10$ ($a/b=2$)	$m \times n = 10 \times 20$ ($a/b=1/2$)
A_{BR}	116577. (mm^2)	99842. (mm^2)	99842. (mm^2)
A_B	190849. (mm^2)	179649. (mm^2)	124694. (mm^2)
A_C	190849. (mm^2)	124694. (mm^2)	179649. (mm^2)

Table 3. Perbandingan lendutan yang diberikan oleh metode pendekatan dengan 3D-FEM

Cases	Theory (mm)		3D-FEM (FEM/Theo) (mm)	Replacement Method (RM/Theo)		
				m×n = 10×10 (a/b)=1	m×n = 20×10 (a/b)=2	m×n = 10×20 (a/b)=1/2
Load: LINE case						
Model-1 P _z =41.20 kN	-1.20	H	-1.17 (0.97)	-0.915 (0.76)	-1.13 (0.94)	-0.511 (0.43)
		G	-1.16 (0.97)	-0.910 (0.76)	-1.12 (0.93)	-0.510 (0.43)
		F	-1.17 (0.97)	-0.915 (0.76)	-1.13 (0.94)	-0.511 (0.43)
Model-2 P _z =41.20 kN	-19.21	C	-18.57 (0.97)	-14.66 (0.76)	-17.87 (0.93)	-8.62 (0.45)
		E	-18.58 (0.97)	-14.65 (0.76)	-17.93 (0.93)	-8.62 (0.45)
		D	-18.57 (0.97)	-14.66 (0.76)	-17.87 (0.93)	-8.62 (0.45)
Model-3 P _x =48.18 kN	0.069	C	0.070 (1.02)	0.054 (0.77)	0.065 (0.94)	0.031 (0.44)
		E	0.067 (0.98)	0.053 (0.77)	0.065 (0.94)	0.031 (0.44)
		D	0.070 (1.02)	0.054 (0.77)	0.065 (0.94)	0.031 (0.44)
Model-4 P _y =824.0 kN	-0.809	C	-0.823 (1.02)	-0.969 (1.19)	-1.13 (1.39)	-0.732 (0.90)
		E	-0.764 (0.95)	-0.913 (1.13)	-1.08 (1.33)	-0.717 (0.89)
		D	-0.823 (1.02)	-0.969 (1.19)	-1.13 (1.39)	-0.732 (0.90)
Load: UNIFORM case						
Model-1 w _z =0.0824 kN/mm	-144.1	H	-139.3 (0.97)	-110.1 (0.76)	-134.7 (0.93)	-64.82 (0.45)
		G	-139.3 (0.97)	-110.1 (0.76)	-134.7 (0.93)	-64.82 (0.45)
		F	-139.3 (0.97)	-110.1 (0.76)	-134.7 (0.93)	-64.82 (0.45)
Model-2 w _z =0.0824 kN/mm	-15.01	C	-14.55 (0.97)	-11.35 (0.76)	-14.04 (0.94)	-7.05 (0.47)
		E	-14.37 (0.96)	-11.28 (0.75)	-13.94 (0.93)	-7.04 (0.47)
		D	-14.55 (0.97)	-11.35 (0.76)	-14.04 (0.94)	-7.05 (0.47)
Load: CONCENTRATED case						
Model-5 P _z =100 kN	-0.752	G	-0.754 (1.00)	-0.670 (0.89)	-0.570 (0.76)	-0.569 (0.76)



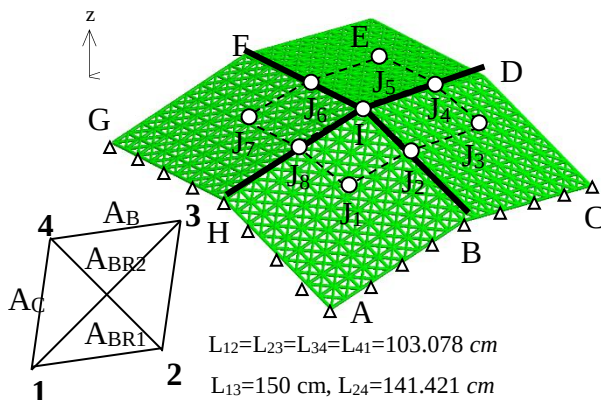
Gambar 3. Struktur Panel Silinder

Tabel 4 Luas Penampang Pengganti

Thickness:	Replacement Areas (See Fig. 7)		
$t=350 \text{ mm}$	$A_{BR} \text{ (mm}^2\text{)}$	$A_B \text{ (mm}^2\text{)}$	$A_C \text{ (mm}^2\text{)}$
$\theta_x=20^\circ$	117,776	191,505	194,104

Tabel 5 Perbandingan lendutan antara RM and 3D-FEM

Type of Method	Deflection ($\times 10^{-1} \text{ mm}$)			
	$\theta_x=20^\circ$			
	δ_A	δ_B	δ_C	δ_D
Type of Load: Uniform Load, $p=1 \text{ kN}$				
RM	-0.378	-0.219	-0.159	-0.259
3D-FEM	-0.496	-0.297	-0.223	-0.355
RM/FEM	0.76	0.74	0.72	0.73



Gambar 4. Struktur Piramida

3.2. Struktur Panel Silinder

Seperti yang diperlihatkan pada Gambar 2, panjang bentangan panel silinder diasumsikan sama dalam arah sumbu-x dan sumbu-y yaitu sebesar 10000 mm . Akan tetapi dalam arah sumbu-x, bentangan didesain dalam bentuk *arch* dengan menggunakan sudut bukaan $\theta_x=20^\circ$. Untuk menggantikan struktur pelat ini dengan elemen batang, setiap bentangan dibagi dalam $n=10$ meshing dengan ukuran hampir bujur sangkar, $a \times b = 1020 \times 1000 \text{ mm}$ (Gambar 2). Ketebalan pelat diasumsikan sama dengan ketebalan elemen batang yaitu 350 mm , Material pelat diasumsikan terbuat dari beton dengan elastisitas 20 kN/mm^2 dan rasio poisson (ν) sebesar 0.2 .

Dengan menerapkan metode pendekatan yang diajukan, luas penampang elemen batang dapat dihitung seperti yang diperlihatkan pada Tabel 4. Untuk

Tabel 6 Luas penampang pengganti

$t=35 \text{ cm}$	Replacement Areas (mm^2) (See Fig. 7)			
	A_{BR1}	A_{BR2}	A_B	A_C
	100089	139902	196539	196539

Tabel 7 Perbandingan lendutan antara RM and 3D-FEM

Type of Method	Deflection (mm) in negative z-direction		
	δ_1	$\delta_{J1}=\delta_{J3}=\delta_{J5}=\delta_{J7}$	$\delta_{J2}=\delta_{J4}=\delta_{J6}=\delta_{J8}$
Type of Load: Uniform Load, $p=1 \text{ kN}$			
RM	0.0339	0.305	0.0596
3D-FEM	0.0441	0.364	0.0718

memverifikasi harga lendutan, model diasumsikan ditumpu sederhana pada sisi kiri dan kanan, dan permukaan panel dibebani dengan beban seragam sebesar $p=1 \text{ kN}$. Lendutan pada titik A, B, C dan D dihitung dengan analisa linear statik. Kemudian, lendutan pada titik-titik tersebut diperbandingkan dengan hasil lendutan metode elemen hingga solid. Hasil perbandingan lendutan pada titik-titik ini diberikan oleh Tabel.5.

3.3. Struktur Piramida

Pada Gambar 4 sebuah struktur piramida yang memiliki bentangan yang sama dalam arah sumbu-x dan sumbu-y, yaitu sebesar 20000 mm . Struktur tersebut akan digantikan dengan struktur ruang dengan mengadopsi penggunaan elemen batang. Untuk tujuan ini, panjang bentangan struktur dibagi dalam $n=20$ meshing yang berbentuk hampir bujur sangkar. Ketebalan

pelat diasumsikan sama dengan ketebalan batang sebesar 350 mm.

Dengan menerapkan metode pendekatan, luas penampang elemen batang dapat dihitung seperti yang diperlihatkan pada Tabel 6. Untuk verifikasi lendutan, model diasumsikan ditumpu sederhana pada seluruh sisi terluar piramida dan permukaan piramida dibebani dengan beban seragam sebesar $p=1$ kN. Lendutan pada titik J_1 sampai dengan J_8 (Gambar 4) dihitung dengan analisa statik linear. Kemudian nantinya lendutan-lendutan tersebut diperbandingkan dengan model piramida yang dibentuk melalui pemodelan metode elemen hingga solid. Hasil perbandingan lendutan pada titik-titik ini diberikan oleh Tabel.7.

3.4. Pembahasan

Dari tiga contoh kasus yang telah dikemukakan di atas, terlihat bahwa penggunaan elemen meshing berbentuk bujur sangkar memberikan tingkat akurasi lendutan rata-rata sekitar 75% jika diperbandingkan dengan model elemen hingga solid. Hasil ini dipandang cukup baik karena hasil yang diperoleh ini berlaku untuk berbagai kasus yang bervariasi. Untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat suatu faktor pengali sebesar $C=1/(0.75)=1.33$ bisa diperkenalkan untuk mendapatkan harga lendutan yang lebih tepat.

Kesimpulan

Dari penelitian ini diperoleh kesimpulan bahwa struktur batang yang digunakan untuk mendekati struktur *shell* continuum cukup mampu mendekati karakteristik struktur *shell* continuum, walaupun hasil lendutan yang diberikan, secara rata-rata, memiliki perbedaan sekitar 25% dibandingkan dengan lendutan yang diberikan oleh struktur kontinum. Elemen pendekatan yang diajukan hanyalah salah satu dari berbagai kemungkinan yang bisa digunakan. Oleh karena itu kemungkinan

perbaikan dalam penggunaan elemen pendekatan ini masih sangat memungkinkan untuk memperoleh hasil yang lebih baik.

Referensi

- [1] Satria, E; Kato, S; Nakazawa, S; Form Finding of RC *Shells* Considering Multiple Design Loads, The 9th Asian Pacific Conference on *Shell* and Spatial Structure, Nagoya, Japan, May, 2009.
- [2] Fagan, M.J., Finite Element Analysis: Theory and Practice, Pearson Education Limited, Edinburgh Gate, Harlow - England 1999.
- [3] Chapra, S; Numerical Methods for Engineering, McGraw-Hill, Singapore, 1998.