

## Error estimation of a function based on uncertainty of measurement results using error propagation method

Ridho Irwansyah

Departemen Teknik Mesin Universitas Indonesia  
Kampus Baru UI Depok, 16424

\*Corresponding author: ridho@eng.ui.ac.id

**Abstract.** Error estimation is an important aspect in the field of measurement due to its critical role on identifying how reliable the measurement result is. In engineering application or laboratory experiment it is often found that a function consists of several measured variables, thus the uncertainty of each variable will be accumulated as the uncertainty of the function. Error propagation method or propagation of uncertainty is one of the most commonly used method to estimate an error of a function that consist of several measured variables. In this study the convective heat transfer coefficient  $h$  was chosen as the case study for error estimation.  $h$  is one of the widely used function in both research and engineering application. By applying the error propagation method, the uncertainty of  $h$  can be analytically estimated.

**Abstrak.** Estimasi error merupakan aspek yang penting dalam melakukan pengukuran dikarenakan fungsinya sebagai penanda seberapa handal hasil pengukuran yang dilakukan. Pada aplikasi keteknikan atau percobaan laboratorium, sering ditemukan suatu fungsi yang terdiri dari beberapa variabel hasil pengukuran, sehingga ketidakpastian dari setiap variabel akan terakumulasi menjadi ketidakpastian fungsi. Metode propagasi error atau propagasi ketidakpastian merupakan salah satu metode yang sering digunakan untuk memperkirakan nilai kesalahan suatu fungsi yang berasal dari hasil pengukuran beberapa variabel. Pada kajian ini koefisien perpindahan kalor konveksi  $h$  dipilih sebagai contoh kasus untuk melakukan estimasi error.  $h$  merupakan salah satu fungsi yang sering digunakan baik pada skala penelitian maupun aplikasi bidang keteknikan. Dengan menggunakan metode propagasi error, ketidakpastian dari  $h$  dapat diperkirakan secara analitik.

**Kata kunci:** Estimasi error, ketidakpastian, teknik pengukuran, kalibrasi, *error propagation method*

© 2018. BKSTM-Indonesia. All rights reserved

### Pendahuluan

Pengukuran merupakan fenomena yang sehari-hari dapat ditemui dalam melakukan aktivitas di laboratorium. Dimana setiap proses pengukuran yang menghasilkan suatu besaran fisik dan memiliki unit tertentu akan selalu memiliki nilai ketidakpastian (*uncertainty*) yang akan berujung pada suatu nilai kesalahan (*error*). Secara umum, kesalahan pada proses pengukuran dapat dibagi kedalam dua kelompok yaitu kesalahan sistematis (*systematic error*) dan kesalahan acak (*random error*). Kesalahan sistematis biasanya berasal dari alat ukur, kesalahan ini dapat dikoreksi melalui proses kalibrasi. Sementara itu, kesalahan acak bisa diakibatkan oleh keterbatasan jangkauan pengukuran dari suatu alat ukur atau sensor. Dalam beberapa kasus, variabel-variabel hasil pengukuran akan digunakan untuk menghitung nilai suatu fungsi. Sehingga kesalahan-kesalahan dari masing-masing variabel akan terakumulasi menjadi kesalahan total fungsi tersebut [1].

Untuk melakukan perkiraan kesalahan suatu fungsi yang terdiri dari beberapa variabel, metode propagasi error (*error propagation method*) sering dimanfaatkan oleh peneliti. Metode ini

mengakomodir ketidakpastian dari setiap alat ukur yang digunakan. Besaran ketidakpastian (*uncertainty*) dari suatu pengukuran dapat dikategorikan kedalam simpangan baku  $\sigma$  (*standard deviation*) dan disajikan dalam bentuk *error bar*. Apabila data yang ditampilkan pada suatu grafik merupakan data dari hasil pengukuran langsung (eg. temperatur, tegangan, arus), maka *error bar* yang ditampilkan merupakan nilai ketidakpastian alat ukur. Dimana ketidakpastian alat ukur merupakan nilai yang merepresentasikan batasan kemampuan, keakuratan atau ketelitian alat ukur [2].

Menampilkan *error bar* atau nilai ketidakpastian dari hasil pengukuran merupakan keniscayaan dalam melakukan penelitian yang berbasis pengukuran. Dengan menampilkan *error bar* peneliti menambahkan informasi seberapa akurat dan teliti hasil pengukuran yang ditampilkan. Oleh karena itu, studi ini bertujuan untuk menunjukkan pentingnya melakukan estimasi error secara analitik sebelum melakukan pengukuran sehingga peneliti memiliki gambaran seberapa besar kesalahan yang akan didapatkan apabila melakukan pengukuran atau penelitian.

**Metode Penelitian**

Secara umum estimasi error menggunakan *error propagation method* dapat dilakukan menggunakan persamaan berikut [3]:

$$Y = f(X_i, X_{i+1} \dots X_n) \tag{1}$$

Dimana  $Y$  merupakan fungsi dari beberapa variabel hasil pengukuran  $X_i$ . Sehingga simpangan baku dari  $Y$  adalah

$$\Delta Y = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i}\right)^2 (\Delta X_i)^2} \tag{2}$$

Dimana  $\frac{\partial Y}{\partial X_i}$  dan  $\Delta X_i$  merupakan turunan parsial dari fungsi  $Y$  terhadap variabel  $X_i$  dan simpangan baku dari variable  $X_i$ .

Pada tulisan ini akan dibahas penggunaan *error propagation method* untuk memperkirakan error dari suatu fungsi. Sebagai contoh akan digunakan koefisien perpindahan kalor konveksi  $h$ , yang merupakan suatu bilangan dimana besarnya didapatkan dari hasil pengukuran beberapa variabel, seperti temperatur  $T$  dan laju aliran massa  $m$ .

Laju perpindahan kalor konveksi  $Q$  pada aliran internal dan temperatur dinding konstan dapat dihitung menggunakan persamaan kesetimbangan energi berikut:

$$Q = mCp(T_w - T_i) \tag{3}$$

$$Q = hA \left[ \frac{(T_w - T_i) - (T_w - T_o)}{\ln\left(\frac{T_w - T_i}{T_w - T_o}\right)} \right] \tag{4}$$

Dengan menggabungkan persamaan 3 dan 4, maka koefisien perpindahan kalor konveksi  $h$  dapat dihitung dengan menggunakan persamaan berikut [4]:

$$h = \frac{mCp}{A} \ln\left(\frac{T_w - T_i}{T_w - T_o}\right) \tag{5}$$

dimana

- $m$  : laju aliran massa (kg/s)
- $Cp$  : kapasitas kalor (J/g.K)
- $A$  : luas permukaan (m<sup>2</sup>)
- $T_w$  : temperatur dinding (°C)
- $T_i$  : temperatur inlet (°C)
- $T_o$  : temperatur outlet (°C)

Estimasi error  $h$  dapat dilakukan dengan menggabungkan persamaan 5 dan 2. Sehingga simpangan baku koefisien perpindahan kalor  $\Delta h$  dapat dihitung menggunakan persamaan berikut:

$$\Delta h = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial m}\right)^2 (\Delta m)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial T_w}\right)^2 (\Delta T_w)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial T_i}\right)^2 (\Delta T_i)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial T_o}\right)^2 (\Delta T_o)^2} \tag{6}$$

Turunan parsial  $h$  terhadap setiap variabel yang diukur adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial h}{\partial T_w} = \frac{mCp}{A} \left( \frac{1}{(T_w - T_i)} - \frac{1}{(T_w - T_o)} \right) \tag{7}$$

$$\frac{\partial h}{\partial T_i} = \frac{mCp}{A} \left( \frac{1}{(T_w - T_i)} \right) \tag{8}$$

$$\frac{\partial h}{\partial T_o} = \frac{mCp}{A} \left( \frac{1}{(T_w - T_o)} \right) \tag{9}$$

$$\frac{\partial h}{\partial m} = \frac{Cp}{A} \ln\left(\frac{T_w - T_i}{T_w - T_o}\right) \tag{10}$$

Dimana

- $\Delta m$  : simpangan baku laju aliran massa
- $\Delta T_w$  : simpangan baku temperatur dinding
- $\Delta T_i$  : simpangan baku temperatur inlet
- $\Delta T_o$  : simpangan baku temperatur outlet

Pada kajian ini, perpindahan kalor konveksi diasumsikan terjadi pada satu kanal mikro yang memiliki penampang persegi dengan diameter hidraulik sebesar 0.5 mm dan panjang 30 mm serta menggunakan fluida kerja air. Dari persamaan 5 dan 6,  $h$  dan  $\Delta h$  didapatkan dengan menggunakan data temperatur  $T$  dan laju aliran massa  $m$  pada tabel 1.

**Tabel 1.** Matriks data untuk kalkulasi  $h$

Parameter	Besaran
Temp Inlet ( $T_i$ )	20 °C
Temp Outlet ( $T_o$ )	48, 47, 45, 44, 43 °C
Temp Dinding ( $T_w$ )	50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90 °C
Laju aliran ( $m$ )	$3e^{-05}$ , $4 e^{-05}$ , $5 e^{-05}$ , $6 e^{-05}$ , $7 e^{-05}$ , $1 e^{-04}$ kg/s

Untuk melakukan estimasi error, setiap alat ukur diasumsikan memiliki ketelitian seperti yang tercantum pada tabel 2. Dimana ketidakpastian alat ukur temperatur divariasikan pada nilai  $\pm 0.1$  dan  $\pm 0.3$  K. Sedangkan ketidakpastian relatif alat ukur laju aliran massa diasumsikan sebesar 1% dari hasil pengukuran. Pada aplikasinya nilai ketidakpastian didapatkan melalui proses kalibrasi, dimana proses kalibrasi yang baik dan mengikuti prosedur akan menghasilkan nilai ketidakpastian yang relatif kecil. Sebagai catatan, sensor yang identik belum tentu memiliki nilai ketidakpastian yang sama setelah melewati proses kalibrasi. Untuk memahami pentingnya proses kalibrasi terhadap hasil pengukuran, penulis menyarankan pembaca untuk merujuk pada literatur [5, 6].

**Tabel 2.** Daftar asumsi ketelitian alat ukur

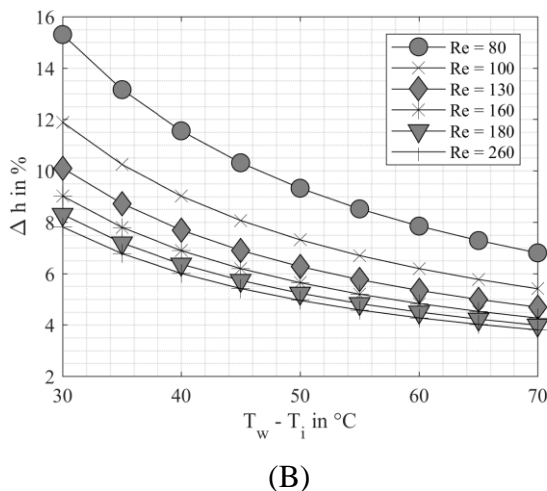
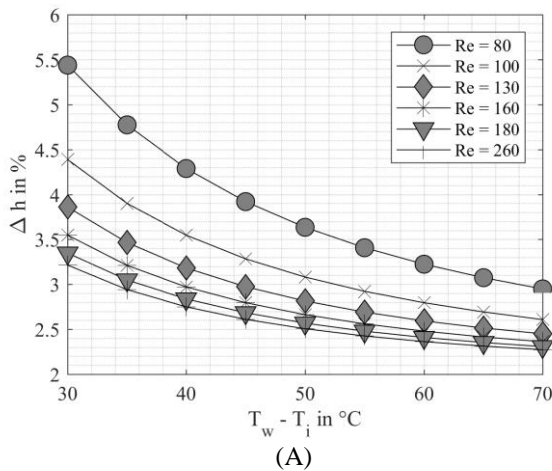
Sensor	Ketelitian
Temp Inlet ( $\Delta T_i$ )	$\pm 0.1, 0.3$ K
Temp Outlet ( $\Delta T_o$ )	$\pm 0.1, 0.3$ K
Temp Dinding ( $\Delta T_w$ )	$\pm 0.1, 0.3$ K
Laju aliran ( $\Delta m$ )	1%

Dengan melakukan estimasi error sebelum melakukan pengukuran, maka peneliti dapat mengetahui alat ukur mana yang akan menjadi

kontributor terbesar untuk kesalahan pengukuran. Pada kajian ini, estimasi error dilakukan dengan tingkat kepercayaan 95% ( $2\sigma$ ).

**Hasil dan Pembahasan**

Hasil estimasi error koefisien perpindahan kalor konveksi untuk nilai ketidakpastian sensor temperatur sebesar  $\pm 0.1$  K dan  $\pm 0.3$  K dapat dilihat pada gambar 1(A) dan (B). Nilai  $\Delta h$  yang ditampilkan merupakan nilai analitik hasil kalkulasi dengan menggunakan persamaan 6. Untuk setiap nilai temperatur dinding kanal  $T_w$  dilakukan kalkulasi ulang untuk nilai temperatur outlet kanal  $T_o$  dengan mempertahankan nilai  $h$ , sehingga untuk nilai  $h$  yang sama didapatkan  $\Delta h$  yang berbeda.



**Gambar 1.** Perbandingan  $\Delta h$  terhadap  $T_w - T_i$  dengan ketelitian sensor temperatur (A)  $\pm 0.1$  K dan (B)  $\pm 0.3$  K

Pada gambar 1 (A) dan (B) dapat dilihat perbandingan nilai simpangan baku dari koefisien perpindahan kalor  $\Delta h$  terhadap  $T_w - T_i$  dengan variasi bilangan Reynolds. Dapat dilihat bahwa  $\Delta h$  berbanding terbalik dengan bilangan Reynolds dan  $T_w - T_i$ , dimana  $\Delta h$  semakin kecil dengan

meningkatnya nilai temperatur dinding dan bilangan Reynolds. Dengan ketelitian sensor temperatur sebesar  $\pm 0.1$  K,  $\Delta h$  relatif tertinggi adalah 5.5% pada saat bilangan Reynolds 80 dan temperature dinding 50 °C. Sementara itu,  $\Delta h$  terkecil adalah 2.27% pada saat bilangan Reynolds 260 dan temperatur dinding 90 °C. Sementara itu, untuk bilangan Reynolds, temperatur dinding yang idientik dan ketelitian sensor temperatur sebesar  $\pm 0.3$  K,  $\Delta h$  relatif tertinggi adalah 15.3% dan terkecil adalah 3.8 %.

Untuk mengetahui sensor yang menjadi kontributor kesalahan terbesar terhadap  $\Delta h$ , maka rasio kesalahan setiap sensor relatif terhadap  $\Delta h$  pada saat bilangan Reynolds 130 dan ketelitian sensor  $\pm 0.1$  K ditampilkan pada tabel 3.

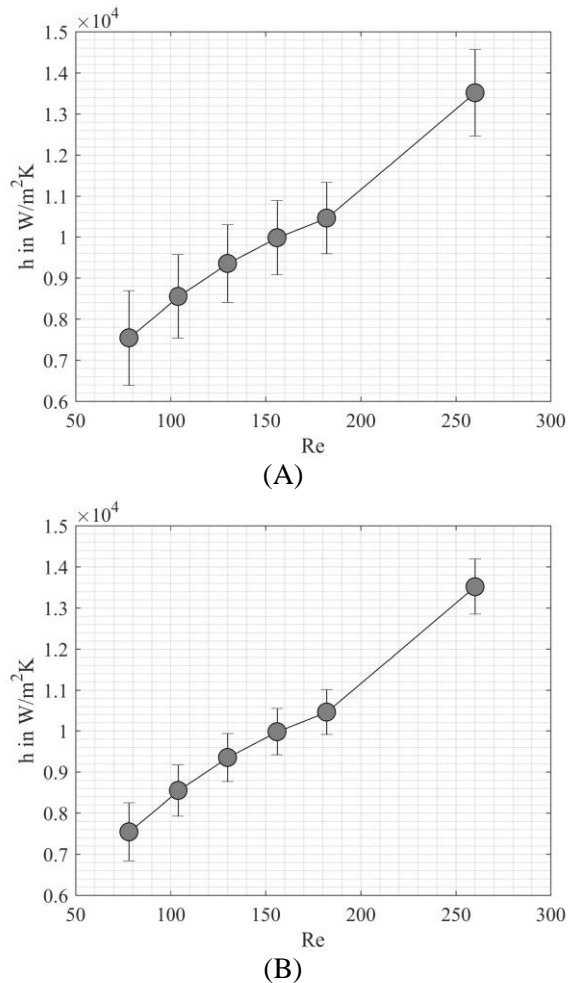
**Tabel 3.** Perbandingan ketidakpastian setiap sensor terhadap  $\Delta h$  pada bilangan Reynolds 130 dan ketelitian sensor temperatur  $\pm 0.1$  K.

%	$T_w - T_i$				
	30 K	40 K	50 K	60 K	70 K
$\Delta h_m / \Delta h$	3.92	6.76	10.18	14.03	18.17
$\Delta h_{T_w} / \Delta h$	40.8	39.6	38.14	36.5	34.74
$\Delta h_{T_i} / \Delta h$	0.97	0.94	0.90	0.86	0.82
$\Delta h_{T_o} / \Delta h$	54.32	52.7	50.78	48.6	46.26

Pada tabel 3 dapat dilihat bahwa sensor temperatur pada dinding dan outlet kanal menjadi penyumbang terbesar terhadap  $\Delta h$ . Dimana nilai kesalahan relatif (dalam %) setiap sensor temperatur turun dengan naiknya nilai temperatur dinding. Hal ini bisa dijelaskan apabila kita merujuk pada persamaan 8 dan persamaan 9.

Untuk mendapatkan gambaran keseluruhan dari ketidakpastian koefisien perpindahan kalor konveksi  $h$ , pada gambar 2 ditampilkan perbandingan bilangan Reynolds terhadap  $h$ . Seperti yang sudah disampaikan pada bagian metode penelitian, *error bar* yang ditampilkan menunjukkan tingkat kepercayaan 95%. Dimana nilai  $h$  yang ditampilkan adalah  $h \pm 2\Delta h$ . Pada gambar 2(A) ditampilkan data pada saat  $T_w - T_i = 30$  °C dan  $T_w - T_i = 50$  °C pada gambar 2(B).

Berdasarkan data yang ditampilkan pada gambar 2, dapat dilihat bahwa *error bar* yang menunjukkan nilai ketidakpastian absolut  $h$  semakin kecil dengan meningkatnya nilai temperature dinding kanal. Seperti yang tercantum pada persamaan 7, karena  $\frac{\partial h}{\partial T_w}$  berbanding terbalik terhadap  $T_w$ , maka dengan meningkatnya  $T_w$ ,  $\frac{\partial h}{\partial T_w}$  akan semakin kecil.



**Gambar 2.** Perbandingan *error bar*  $h$  pada saat (A)  $T_w$ .  $T_i = 30\text{ }^\circ\text{C}$  dan (B)  $T_w$ .  $T_i = 50\text{ }^\circ\text{C}$

## Kesimpulan

Pada kajian ini telah dilakukan estimasi error dari koefisien perpindahan kalor konveksi  $h$ . Metode yang digunakan adalah metode propagasi error, dimana ketidakpastiaan dari setiap alat ukur dilibatkan dalam melakukan estimasi error  $h$ . Estimasi error dibutuhkan untuk memberikan gambaran seberapa handal dan terpercaya hasil pengukuran yang dilakukan, sehingga data yang ditampilkan bisa dipertanggungjawabkan secara ilmiah. Metode ini bisa digunakan dari skala praktikum laboratorium hingga penelitian skala besar yang melibatkan fungsi yang tersusun atas beberapa variabel hasil pengukuran.

## Referensi

- [1] P. F. Dunn and M. P. Davis, Measurement and Data Analysis for Engineering and Science, CRC Press, 2017.
- [2] A. S. Morris and R. Langari, Measurement and Instrumentation: Theory and Application, Academic Press, 2015.
- [3] M. Grabe, Measurement Uncertainties in Science and Technology, Springer International Publishing, 2014.
- [4] Y. A. Cengel and A. J. Ghajar, Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Applications, 5th ed., McGraw Hill, 2015.
- [5] P. Campbell, An Introduction to Measurement and Calibration 1st Edition, Industrial Press, 1995.
- [6] M. Cable, Calibration: A Technician's Guide (ISA Technician), ISA, 2005.