

Analytical and Numerical Studies of Dynamic Finite Element Analysis of Coaxial Dual Rotor Systems with Pseudo Modal Method Using Matlab

Zulhendri H^{1,*}, Alexander Sembiring² dan Asnawi Lubis³

^{1,3}Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Lampung – Bandar Lampung

²Prodi Magister, Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik Universitas Lampung – Bandar Lampung

*Corresponding author: Zulhendri.h@eng.unila.ac.id

Abstract. System of shaft rotating machine (rotor dynamics) are the most popular machine. It is commonly used in industrial application such as in steam compressors, low-pressure and high-pressure centrifugal compressors, gas turbines and aircraft engines. Dual rotor systems are usually found in a compressor and turbine engine. In this paper, finite element method (FEM) and pseudo modal are presented for the calculation of dynamic characteristics of dual rotor systems. Single rotor system is divided into 2 elements for analytical study, 13 elements for numerical study, meanwhile dual rotor system is divided into 11 elements. A computer program is developed to solve critical speeds and mass unbalance responses using engineering software namely Matlab (R2016a). The results obtained in this investigation were closed to other previous studied found in the literature which has difference between 0.12% until 6.6%.

Abstrak. Sistem poros rotor atau *rotor dynamics* merupakan mesin berputar yang terus mengalami perkembangan sangat signifikan. Penggunaan sistem poros rotor dalam dunia industri diantaranya digunakan pada kompresor uap, kompresor sentrifugal tekanan rendah dan tinggi, turbin gas, dan mesin pesawat. Sistem rotor bertingkat biasanya dijumpai pada kompresor dan mesin turbin. Dalam makalah ini akan dikaji penghitungan karakteristik dinamik sistem rotor bertingkat (*dual rotor*) menggunakan pemodelan elemen hingga dan penyelesaian dengan metode pseudo modal. Untuk sistem rotor tunggal sistem dibagi menjadi 2 elemen untuk kajian analitik, sedangkan untuk numerik menjadi 13 elemen. Sedangkan untuk sistem rotor bertingkat dibagi menjadi 11 elemen. Sebuah program disusun untuk menghitung kecepatan putaran kritis serta respon massa tak-imbang, kode program ditulis dalam Bahasa pemrograman Matlab (R2016a). Hasil penghitungan yang diperoleh dalam penelitian ini dibandingkan dengan kajian yang sudah ada di literatur dan menunjukkan perbedaan hasil yang masih bisa diterima yaitu sekitar 0,12 % sampai 6,6% untuk berbagai pembagian jumlah elemen.

Keywords: diagram Campbell, , *dual rotor*, matlab, metode elemen hingga, pseudo-modal

© 2018. BKSTM-Indonesia. All rights reserved

Pendahuluan

Mesin-mesin industri saat ini terus mengalami perkembangan yang sangat signifikan. Salah satu mesin yang banyak digunakan di dalam keperluan industri adalah mesin-mesin rotasi atau mesin berputar. Mesin-mesin rotasi ini sangat erat hubungannya dengan sistem poros rotor. Fungsi utama dari poros pada sistem poros rotor adalah mentransmisikan daya dengan putaran. Sistem poros rotor mempunyai elemen-elemen utama yaitu; rotor (*disk*), poros (*shaft*), bantalan (*bearing*) yang mempunyai sifat mekanik yang berbeda-beda. Penggunaan sistem poros rotor dalam dunia industri diantaranya digunakan pada kompresor uap, kompresor sentrifugal tekanan rendah dan tinggi, turbin gas, dan mesin pesawat [7].

Sistem poros rotor akan beroperasi dengan baik jika tidak berputar dekat dengan frekuensi

pribadinya (putaran kritis), karena jika sistem poros rotor beroperasi dekat dengan frekuensi pribadinya (putaran kritisnya) akan menimbulkan resonansi yang menyebabkan amplitudo semakin besar dan dapat dipastikan bahwa akan terjadi kegagalan pada sistem poros rotor. Dalam menganalisis karakteristik dinamik terdapat beberapa metode yang digunakan; Metode *Jeffcott* rotor dapat digunakan untuk memodelkan sistem poros rotor [1], Metode Elemen Hingga merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mendapatkan karakteristik dinamik sistem poros rotor [9]. Metode elemen hingga kemudian dikembangkan sehingga didapatkan metode elemen hingga dan metode matrik transfer [2]. Metode penggabungan antara elemen hingga, metoda matrik transfer, metoda integrasi numerik deret waktu dan metoda Hubolt untuk pemodelan sistem poros rotor agar didapatkan waktu komputasi dan numerik yang

lebih cepat [5]. Metode penggabungan *pseudo modal* dan metode *direct* untuk memodelkan sistem poros-rotor [7]. Yanto pada tahun 2014 telah melakukan analisis perilaku dinamik pada sistem poros rotor 3D, dan didapatkan variasi putaran kritis sebanyak 192 frekuensi pribadi [11]. Pola getar yang ditunjukkan terdapat 96 searah dengan putaran (maju) dan 96 berlawanan arah dengan putaran (mundur). Fei pada tahun 2013 telah melakukan investigasi karakteristik dinamik sistem poros rotor bertingkat yang disimulasikan berdasarkan metode elemen hingga dan memperoleh hasil bahwa dengan menggunakan metode elemen hingga dapat memprediksi karakteristik dinamik sistem poros rotor bertingkat. Hasil pengujian yang didapatkan berupa kecepatan putaran kritis, perpindahan *transient*, dan diagram *trajectory* [3].

Dalam makalah ini akan dikaji karakteristik dinamik sistem rotor secara analitik dan numerik dengan menyusun program komputasi dalam bahasa pemrograman teknik yakni *MATLAB (R2016a)*. Kaji analitik dan numerik ini dilakukan untuk mendapatkan karakteristik dinamik dari sistem poros rotor bertingkat seperti putaran kritis dan respon massa tak imbang (*mass unbalance response*) yang ditimbulkan oleh sistem poros rotor bertingkat atau *dual* rotor. Pemodelan elemen hingga dan metode *pseudo modal* digunakan agar diperoleh putaran kritis, dan respon massa tak imbang (*mass unbalance response*).

Metode Penelitian

Kaji analitik dilakukan hanya pada sistem poros rotor sederhana saja yakni dengan membaginya dalam 2 elemen hingga. Mengingat jumlah elemen hingga yang banyak, maka sistem poros rotor bertingkat tidak dikaji secara analitik tetapi akan dikaji seara numerik. Metode yang digunakan adalah dengan memodelkan sistem poros rotor menjadi beberapa elemen dan penyelesaian persamaan gerak menggunakan metode *pseudo modal*.

Elemen dasar dari sistem poros rotor terdiri atas rotor, poros, *bearings*, dan *seals*. Ketidakseimbangan massa (*mass unbalances*) tidak bisa secara utuh diabaikan, namun harus tetap diperhitungkan karena hal ini tidak dapat dihindari. Persamaan energi kinetik dibutuhkan untuk menemukan karakteristik dari rotor, poros, dan massa tak imbang. Energi regangan (*strain energy*) digunakan untuk mencari karakteristik poros (*shaft*). Persamaan *Lagrange* digunakan untuk memperoleh persamaan gerak sistem poros rotor, seperti pada Pers. (1).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial T}{\partial q_i} = F q_i \quad (1)$$

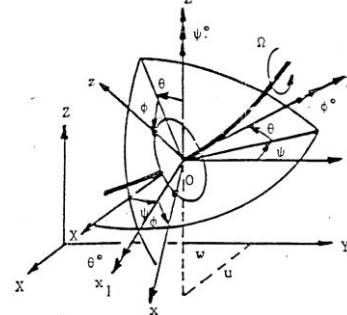
Konsep dasar metode elemen hingga adalah untuk menemukan solusi dari masalah yang rumit dengan penyederhanaan melalui pemodelan elemen dengan jumlah. Semakin banyak elemen-elemen yang ada dan ukurannya yang kecil maka hasil yang diperoleh akan semakin mendekati hasil aktualnya [10].

Rotor akan dibagi menjadi beberapa elemen yang akan dihubungkan oleh nodal. Defleksi atau perpindahan nodal dapat dinyatakan sebagai vektor, Pers. (2) menyatakan vektor perpindahan nodal.

$$\delta = [u, w, \theta, \psi]^T \quad (2)$$

Elemen hingga rotor (*disk*)

Rotor (*disk*) diasumsikan kaku dan karakteristiknya sangat dipengaruhi oleh energi kinetiknya. $R_O (XYZ)$ adalah *inertial frame* dan $R (x, y, z)$ merupakan koordinat piringan yang tetap pada *disk*, seperti yang dijelaskan pada Gambar 1. Koordinat sistem (*xyz*) berhubungan dengan koordinat sistem *XYZ* melalui tiga sudut yaitu ψ , θ , dan ϕ .



Gambar 1. Kerangka acuan disk pada poros [7].

Energi kinetik *disk* dinyatakan dalam Pers. (3).

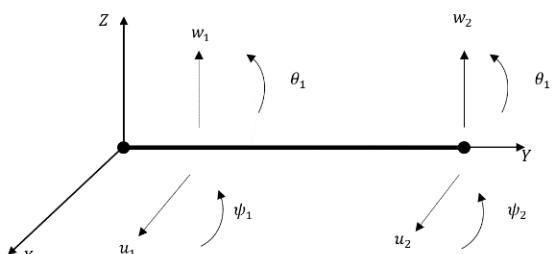
$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (3)$$

Dengan menerapkan persamaan *Lagrange* pada Pers. (3) maka diperoleh persamaan matriks elemen *disk* berikut.

$$M_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Poros

Poros dapat dimodelkan sebagai batang berpenampang lingkaran dengan luas penampang yang konstan, dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Elemen hingga poros [7]

Persamaan umum energi kinetik poros dapat dilihat pada Pers. (5).

$$T = \frac{1}{2} \delta u^t M_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^t M_2 \delta w + \frac{1}{2} \delta u^t M_3 \delta u + \frac{1}{2} \delta u^t M_4 \delta u + \Omega \delta u^t M_5 \delta w + \rho I L \Omega^2 \quad (5)$$

Nilai M_1 dan M_2 adalah matriks massa klasik, M_3 dan M_4 didapatkan dari efek inersia putar dan M_5 didapatkan dari efek giroskopik. Dengan menerapkan persamaan *Lagrange* pada Pers. (5) didapatkan Pers. (6).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = (M + M_s) \ddot{\delta} + C \dot{\delta} \quad (6)$$

Nilai M dan M_s didapatkan dari M_1 , M_2 dan M_3 , M_4 dan matriks C dari M_5 . Matriks-matriks tersebut adalah

$$M = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$M_s = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$C = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Energi regangan yang ada pada poros dapat dilihat pada Pers. (10).

$$U = \frac{1}{2} \delta u^t K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^t K_2 \delta w + \frac{1}{2} \delta u^t K_3 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^t K_4 \delta w \quad (10)$$

Dengan nilai K_1 dan K_2 adalah matriks kekakuan klasik, dan K_3 dan K_4 merupakan matriks akibat adanya pengaruh gaya aksial. Efek geser perlu diperhitungkan, efek geser tersebut dapat dinyatakan sebagai Pers. (11).

$$a = \frac{12EI}{GSL^2} \quad (11)$$

Dengan nilai I merupakan momen inersia penampang, nilai G (modulus geser), dan nilai E (modulus elastisitas) didapatkan dari properti material poros yang digunakan.

$$I = \frac{\pi R_1^4}{4} \quad (12)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (13)$$

Dengan nilai ν merupakan *poisson's ratio*, dan $S_r (\cong S)$ adalah luas reduksi dari penampang melintang. Pengaruh yang dihasilkan oleh efek geser dapat didefinisikan ke dalam matriks K_s . Matriks kekakuan klasik K_c didapatkan dari K_1 , K_2 dan K_s , dan matriks K_F atau matriks gaya aksial diadaptasi dari K_3 dan K_4 .

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = K \delta \quad (14)$$

Dengan

$$K = K_c + K_F \quad (15)$$

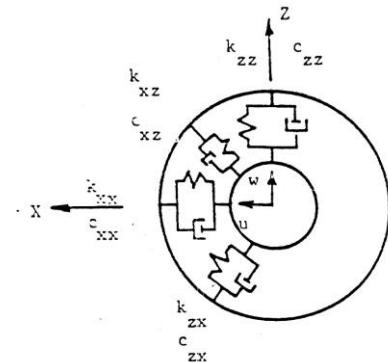
Nilai matriks K_c dan K_F dapat dilihat pada Pers. (16) dan (17).

$$K_c = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$K_F = \frac{F}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Bantalan dan seals

Kekakuan dan redaman viskos diasumsikan sudah diketahui, dan pengaruh dari *bending* dapat diabaikan seperti tampak pada Gambar 3.



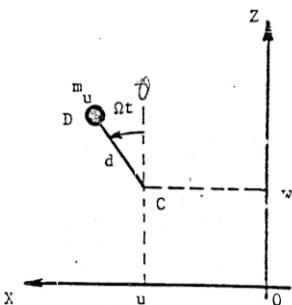
Gambar 3. Kekakuan dan redaman bearings [7]

Persamaan matriks kekakuan redamannya dapat dilihat pada Pers. (18). Persamaan matriksnya adalah:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Massa takimbang

Ketidakseimbangan pada sistem poros rotor (m_u) yang terletak pada jarak d dari pusat geometri poros seperti pada Gambar 4.



Gambar 4 Massa takimbang [7]

Persamaan matriks massa takimbang dijelaskan pada Pers. (19), dan (20).

$$F_2 = m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$F_3 = m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (20)$$

Secara umum solusi persamaan gerak sistem poros rotor dapat dituliskan pada Pers. (21).

$$M\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + K\delta = F(t) \quad (21)$$

Sedangkan untuk solusi persamaan gerak sistem poros bertingkat atau *dual* rotor dinyatakan dalam Pers. (22).

$$M\ddot{\delta} + C(\Omega_1, \Omega_2)\dot{\delta} + K\delta = F(t) \quad (22)$$

Penyelesaian persamaan metode *pseudo-modal* dapat dilihat pada Pers. (23).

$$M\ddot{\delta} + K^*\delta = 0 \quad (23)$$

Dengan nilai M adalah matriks massa dan K^* merupakan matrik kekakuan yang diperoleh dari nilai K , dimana nilai k_{zz} dan k_{zx} diabaikan. N (banyak) modus getar terendah pertama ϕ_1, \dots, ϕ_n dari Pers. (22) didapatkan dengan teknik iterasi, dan jika dituliskan dalam bentuk matriks dapat dituliskan sebagai Pers. (24) berikut.

$$\phi = [\phi_1, \dots, \phi_n] \quad (24)$$

Dari Pers. (23) dapat diperoleh Pers. baru (25).

$$\delta = \phi p \quad (25)$$

Pers. (25) disubstitusikan ke dalam persamaan gerak sistem poros rotor (21) dan mengalikannya dengan ϕ^T .

$$\phi^T M \ddot{p} + \phi^T C(\Omega) \phi \dot{p} + \phi^T K \phi p = \phi^T F(t) \quad (26)$$

Diagonal matriks $\phi^T C \phi$ ditambahkan dengan modal *damping* c_i , yang diperoleh dari analogi sistem massa pegas teredam *SDOF* (*single-degree-of-freedom*).

$$c_i = 2\alpha_i \sqrt{\phi^T K \phi} \cdot \phi^T M \ddot{p} \quad (27)$$

Dengan nilai faktor redaman modal α_i diperoleh dari pengalaman perancang. Sehingga solusi persamaan gerak sistem poros rotor (21) tanpa gaya eksternal dapat dilihat pada Pers. (28) berikut.

$$\phi^T M \ddot{p} + \phi^T C(\Omega) \phi \dot{p} + \phi^T K \phi p = 0 \quad (28)$$

Dengan nilai p dapat diasumsikan sebagai Pers. (29) berikut.

$$p = P e^{rt} \quad (29)$$

Pers. (29) disubtitusikan ke dalam Pers. (28) maka didapatkan persamaan karakteristiknya sebagai berikut.

$$[r^2 m + r c + k] P = 0 \quad (30)$$

Pers. (30) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan matriks ke dalam Pers. (31).

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -k^{-1}m & -k^{-1}c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} rP \\ P \end{Bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{Bmatrix} rP \\ P \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Penyelesaian masalah nilai eigen (*eigenvalue*) atau frekuensi pribadi dan modus getar dari Pers. (31) dapat diperoleh dalam besaran yang kompleks. Dari hasil yang diperoleh maka diagram *Campbell* dapat digambarkan yang menampilkan daerah-daerah kritis sehingga kecepatan kritisnya dapat diketahui. Respon massa takimbang didapatkan dari Pers. (32) berikut.

$$m\ddot{p} + c\dot{p} + k\delta = f_2 \sin \Omega t + f_3 \cos \Omega t \quad (32)$$

Dengan nilai f_2 dan f_3 dapat diperhatikan pada Pers. (33) dan (34).

$$f_2 = \phi^T F_2 \quad (33)$$

$$f_3 = \phi^T F_3 \quad (34)$$

Dengan asumsi jawab seperti Pers. (35).

$$p = p_2 \sin \Omega t + p_3 \cos \Omega t \quad (35)$$

Dengan mensubstitusikan Pers. (35) ke dalam Pers. (32) akan diperoleh persamaan dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} k - m\Omega^2 & -\Omega c \\ \Omega c & k - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

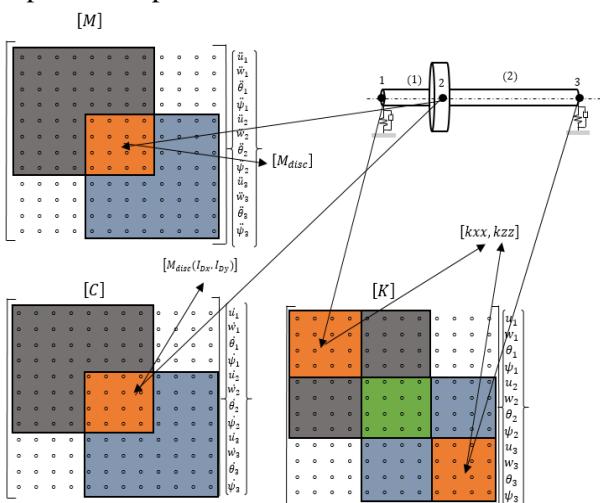
Penyelesaian Pers. (36) dan dari Pers. (25) diperoleh vektor perpindahan sebagai berikut.

$$\delta = \phi \{p_2(\Omega) \sin \Omega t + p_3(\Omega) \cos \Omega t\} \quad (37)$$

Hasil dan Pembahasan

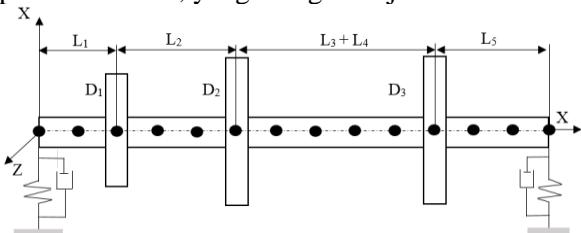
Kaji analitik dilakukan pada sistem poros rotor sederhana hingga mendapatkan pola pengglobalan matriks sistem poros rotor. Setelah mendapatkan matriks dari setiap elemen-elemen, selanjutnya adalah menggabungkan matriks lokal agar menjadi matriks global. Pada sistem poros rotor sederhana dibagi menjadi 2 elemen hingga, sehingga menghasilkan persamaan matriks global $[12 \times 12]$.

Penyusunan matriks lokal menjadi matriks global dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Pengglobalan matriks sistem rotor tunggal

Sistem poros rotor sederhana dimodelkan seperti pada Gambar 6, yang dibagi menjadi 13 elemen.



Gambar 6. Pemodelan elemen hingga sistem [7]

Data geometri sistem poros rotor dijelaskan pada beberapa tabel 1 di bawah ini.

Tabel 1. Properti material poros dan disk

Massa Jenis (ρ)	Modulus Elastisitas (E)	Position Ratio (v)
7800 kg/m^3	$2 \times 10^{11} N/m^2$	0,3

Tabel 2. Data geometri poros

Radius dalam R_i (m)	Radius luar R_o (m)	L_1 (m)	L_2 (m)	L_3 (m)	L_4 (m)	L_5 (m)
0	0,05	0,2	0,3	0,25	0,25	0,3

Tabel 3. Data geometri disk

Disk	D_1	D_2	D_3
Tebal (m)	0,05	0,05	0,06
Radius dalam (m)	0,05	0,05	0,05
Radius luar (m)	0,12	0,2	0,2

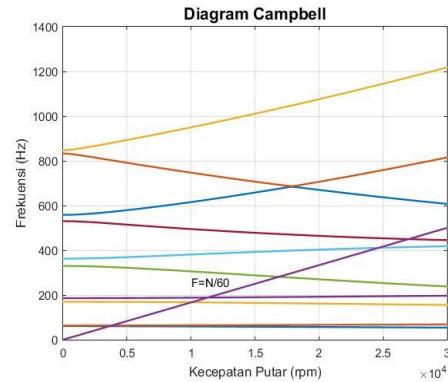
Tabel 4. Karakteristik bantalan dan seals

k_{xx} N/m	k_{zz} N/m	k_{xz} N/m	k_{zx} N/m	c_{xx} N/m	c_{zz} N/m	c_{xz} N/m	c_{zx} N/m
5×10^7	7×10^7	0	0	5×10^2	7×10^2	0	0

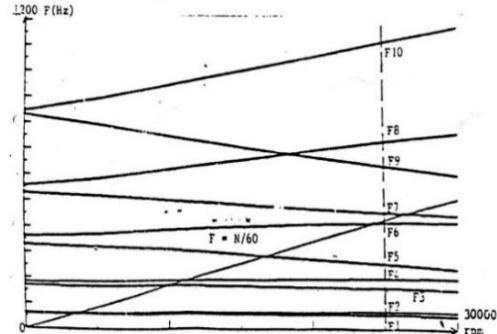
Tabel 5. Data massa tak imbang pada disk 2

Massa tak-imbang (m_u)	Jarak (d) = (R_{OD2})	Posisi angular α (°)
0,2 kg m	0,001 m	0

Kecepatan putar rotor mulai dari 0 rpm sampai dengan 30.000 rpm. Diagram *Campbell* yang didapatkan melalui perhitungan komputasi, dibandingkan dengan diagram *Campbell* hasil referensi, yang dapat dilihat pada Gambar 7 dan Gambar 8.

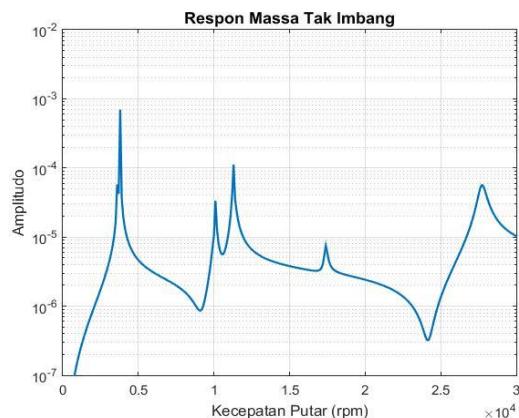


Gambar 7. Diagram Campbell hasil komputasi

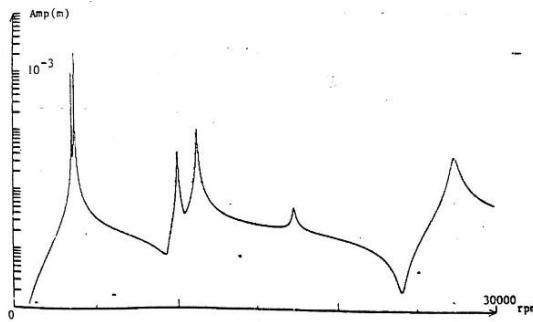


Gambar 8. Diagram Campbell hasil referensi [7]

Respon massa tak imbang yang didapatkan melalui perhitungan komputasi terdapat pada Gambar 9, dibandingkan dengan respon massa tak imbang hasil referensi, yang dapat dilihat pada Gambar 10.



Gambar 9. Respon massa tak imbang n=6



Gambar 10. Respon massa tak imbang referensi [7]

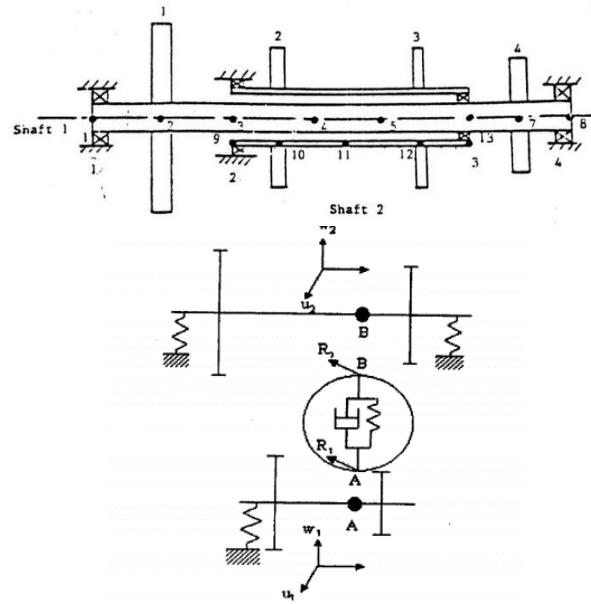
Nilai n merupakan banyaknya frekuensi pribadi pertama yang ditampilkan. Dapat diperhatikan pada Gambar responde massa tak imbang, ketika mendekati kecepatan putar kritis sistem maka amplitudo cenderung untuk naik atau semakin besar. Dari data-data yang sudah didapatkan, maka kita dapat menentukan batas operasi dari sistem poros yang ada. Kesepuluh frekuensi pribadi pertama pada kecepatan putaran 25.000 rpm dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6. Perbandingan frekuensi pribadi hasil referensi dan program komputasi (13 elemen hingga).

Frekuensi (Hz)	Referensi (Hz)	Program Komputasi (Hz)	Beda (%)
F1	55,408	55,48	0,12 %
F2	67,209	67,299	0,13 %
F3	157,90	158,48	0,36 %
F4	193,71	194,364	0,33 %
F5	249,90	253,457	1,42 %
F6	407,62	411,50	0,95 %
F7	446,62	453,527	1,54 %
F8	715,03	758,763	6,11 %
F9	622,65	637,162	2,33 %
F10	1093,0	1144,813	4,74 %

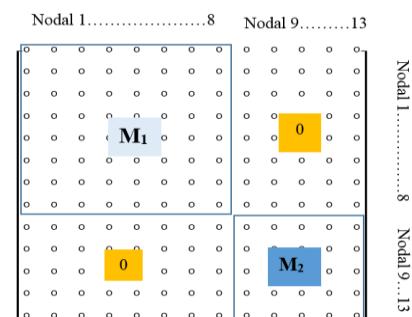
Pada Tabel 6 merupakan Tabel perbandingan program komputasi dan referensi menggunakan 13 elemen dengan panjang elemen yang sama. Dapat diperhatikan bahwa bedanya tidak terlalu jauh, beda paling besar terdapat pada frekuensi pribadi yang ke 8 sebesar 6,11 %, dan persentase *error* paling kecil sebesar 0,33 %. Hal ini menunjukkan bahwa program komputasi yang sudah dibuat cukup akurat.

Sistem poros rotor bertingkat merupakan sistem poros rotor yang memiliki dua buah sistem rotor dimana kedua sumbu saling berhimpit mengalami rotasi bersamaan dengan kecepatan putar yang sama atau berbeda, begitu juga dengan arah putaran dan dihubungkan oleh bantalan antar poros (*intershaft bearing*) seperti pada Gambar 11.

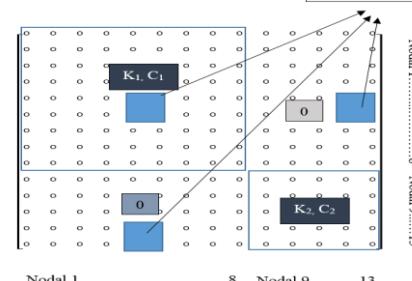


Gambar 11. Model sistem dual rotor [7].

Sistem *dual rotor* dipengaruhi oleh *intershaft bearing* yang akan berpengaruh pada penyusunan matriks globalnya. Penyusunan matriks global sistem *dual rotor* dimulai dari menyusun matriks untuk sistem rotor dalam dan luar, kemudian matriks global masing-masing rotor digabungkan menjadi matriks global dual sistem *dual rotor*. Penyusunan matriks massa, kekakuan dan redaman global *dual rotor* dapat dilihat pada Gambar 12 dan 13.

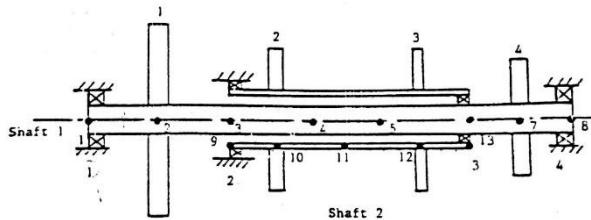


Gambar 12. Pengglobalan matriks massa dual rotor *intershaft bearing*



Gambar 13. Pengglobalan matriks kekakuan dan redaman sistem dual rotor

Sistem dual rotor yang dikaji merupakan sistem dual rotor dari referensi dan memvalidasi program komputasi yang sudah dibuat. Model sistem dual rotor yang dikaji dapat dilihat pada Gambar 14.



Gambar 14. Pemodelan elemen hingga dual rotor [7]

Pada pemodelan elemen hingga sistem *dual rotor*, terdapat 7 elemen hingga untuk bagian sistem rotor dalam (*inner shaft*) dan 4 elemen hingga untuk bagian sistem rotor luar (*outer shaft*). Data geometri dual rotor dapat dilihat pada beberapa tabel berikut.

Tabel 7. Dimensi penampang poros sistem *dual rotor*

Poros	Jari-Jari Dalam (cm)	Jari-Jari Luar (cm)
Poros dalam (1)	0,0	1,524
Poros luar (2)	2,54	3,048

Tabel 8. Data disk sistem *dual rotor*

Disk	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
M(kg)	10,51	7,01	3,5	7,01
I _{Dx} 10 ⁻² (kgm ²)	4,295	2,145	1,355	3,39
I _{Dy} 10 ⁻² (kgm ²)	8,59	4,29	2,71	6,78

Tabel 9. Karakteristik bantalan sistem *dual rotor*

Bantalan	1	2	3	4
k _{xx} = k _{zz} , (N/m)	2,63 × 10 ⁷	1,75 × 10 ⁷	0,875 × 10 ⁷	1,75 × 10 ⁷

Tabel 10. Koordinat nodal pada poros dalam

Nodal	1	2	3	4	5	6	7	8
Absis (Cm)	0	0,762	15,875	24,13	32,385	40,64	45,72	50,8

Tabel 11. Koordinat nodal pada poros luar

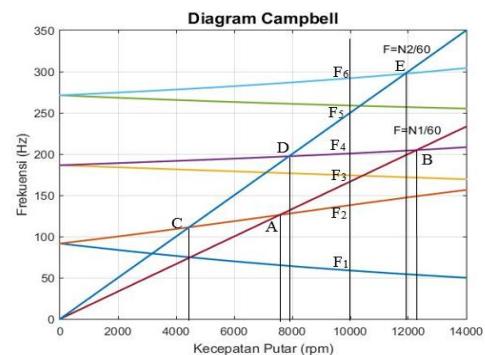
Nodal	9	10	11	12	13
Absis (Cm)	15,24	20,32	27,94	35,56	40,64

Tabel 12. Data properti material poros dan disk

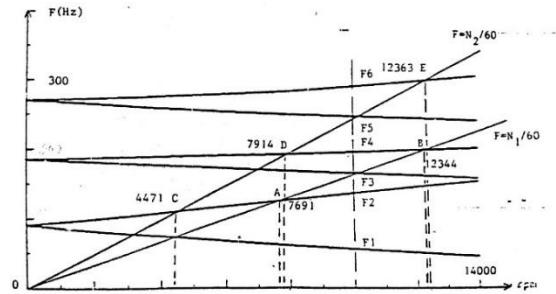
Massa Jenis (ρ)	Modulus Elastisitas (E)	Position Ratio (v)
7800 kg/m ³	2×10 ¹¹ N/m ²	0,3

Pada perhitungan komputasi yang dilakukan enam frekuensi terendah pertama dapat dilihat pada Gambar 15. Kecepatan kritis dapat dilihat pada perpotongan frekuensi pribadi dengan garis F = N1/60. Sedangkan Gambar diagram *Campbell* yang ada pada referensi ditunjukkan pada Gambar 16. Melalui diagram *Campbell* yang ada dapat

diketahui daerah-daerah mana yang harus dihindari terjadinya putaran kritis dari sistem, jika sistem beroperasi di daerah kecepatan putar kritisnya maka akan mengakibatkan terjadinya resonansi dan akan menyebabkan kegagalan pada sistem.



Gambar 15. Diagram *Campbell* sistem *dual rotor* fungsi putaran rotor 1



Gambar 16. Diagram *Campbell* sistem *dual rotor* fungsi putaran rotor 1 referensi [7]

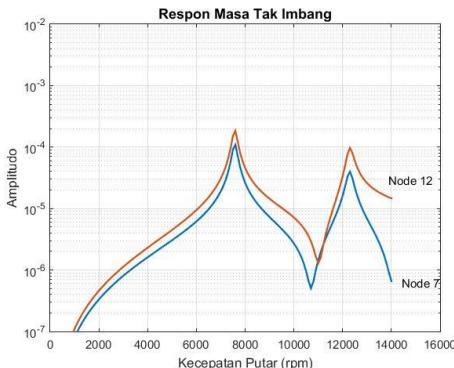
Perbandingan hasil komputasi kecepatan kritis untuk sistem *dual rotor* terhadap referensi dapat dilihat pada Tabel 13.

Tabel 13. Perbandingan hasil perhitungan komputasi dan referensi

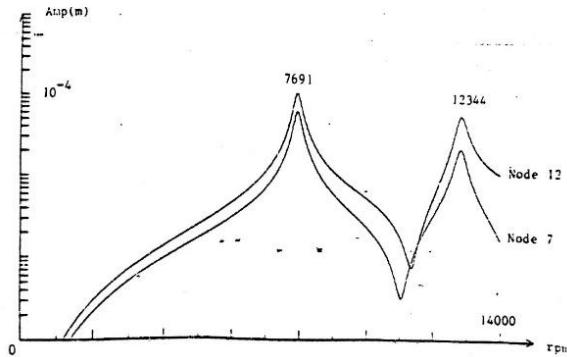
Kecepatan Kritis (rpm)	Referensi (rpm)	Program Komp. (rpm)	Beda (%)
C	4471	4450	0,46
A	7691	7573	1,53
D	7914	7892	0,2
B	12344	12299	0,36
E	12363	11900	3,7

Perbandingan dari hasil data yang didapatkan menunjukkan bahwa terjadi perbedaan antara 0,2 % sampai 3,7 %.

Pada sistem *dual rotor* terdapat sebuah massa takimbang yang diasumsikan terletak pada sistem poros rotor, besar dari massa takimbang tersebut adalah 70 g mm. Hasil yang didapatkan melalui perhitungan komputasi dapat dilihat pada Gambar 17, dan hasil prediksi respon massa takimbang berdasarkan referensi dapat dilihat pada Gambar 18.



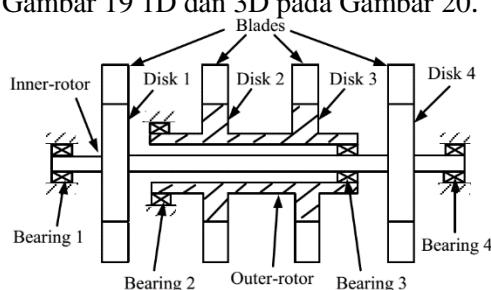
Gambar 17. Respon massa tak imbal komputasi



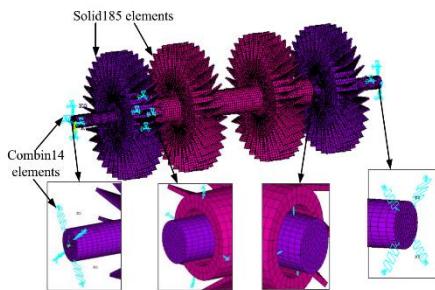
Gambar 18. Respon massa tak imbal referensi [7]

Pada gambar prediksi respon massa tak imbal ketika mendekati kecepatan putaran kritis sistem *dual rotor* amplitudo semakin besar. Puncak tertinggi pada respon massa tak imbal terdapat pada kecepatan putar 7.573 rpm atau kecepatan kritis C2. Puncak ke 2 yang ada pada respon massa tak imbal terjadi pada kecepatan putar 12.299 rpm kecepatan kritis C4. Melalui respon massa tak imbal, dapat juga ditentukan putaran kritis dari sistem *dual rotor*. Pada respon massa tak imbal ketika mendekati kecepatan putaran kritisnya amplitudo cenderung naik.

Studi kasus sistem *dual rotor* dilakukan untuk memvalidasi program komputasi yang sudah disusun dapat diterapkan dalam kasus sistem *dual rotor*. Pada studi kasus ini sistem *dual rotor* yang dikaji merupakan sistem yang sudah diuji terlebih dahulu dengan model elemen hingga 1D (1 dimensi) dan model elemen hingga 3D (3 dimensi). Sistem *dual rotor* yang dikaji dimodelkan seperti pada Gambar 19 1D dan 3D pada Gambar 20.



Gambar 19. Model sistem dual rotor 1 dimensi [8]



Gambar 20. Pemodelan sistem dual rotor 3 dimensi (3D) [8]

Data geometri sistem poros rotor bertingkat pada studi kasus dapat dilihat pada beberapa tabel berikut.

Tabel 14. Data geometri poros [8]

Poros	Panjang (m)	Diameter Dalam (m)	Diameter Luar (m)
Poros luar	0,32	0,032	0,048
Poros dalam	0,6	0	0,024

Tabel 15. Properti material poros [8]

Massa jenis (ρ)	Modulus elastisitas (E)	Poison ratio (v)
7800 kg/m ³	2,1 × 10 ¹¹ N/m ²	0,3

Tabel 16. Karakteristik bantalan dan seals [8]

Bantalan	1	2	3	4
$k_{xx} = k_{zz}$, (N/m)	$1,6 \times 10^7$	$1,4 \times 10^7$	$1,4 \times 10^7$	1×10^7

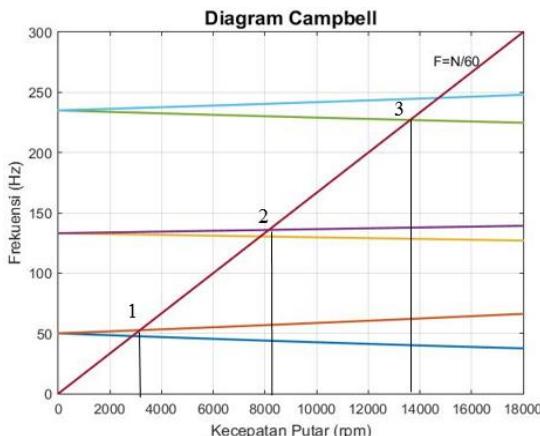
Tabel 17. Data geometri disk [8]

Disk	Diameter Dalam (m)	Diameter Luar (m)	Tebal (m)	Jarak dari Bearing 1 (m)
1	0,024	0,15	0,04	0,1
2	0,048	0,15	0,04	0,22
3	0,048	0,15	0,04	0,38
4	0,024	0,15	0,04	0,5

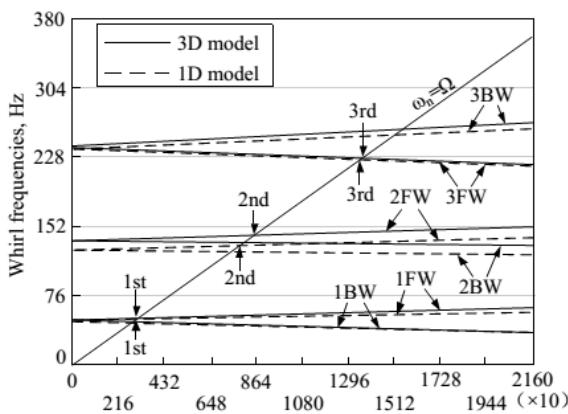
Tabel 18. Data properti material disk [8]

Disk	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
$M(kg)$	6,75	6,33	6,33	6,75
$I_{Dx} 10^{-2}(kgm^2)$	2,85	2,84	2,84	2,85
$I_{Dy} 10^{-2}(kgm^2)$	1,52	1,50	1,50	1,52

Hasil plot diagram *Campbell* dapat dilihat pada Gambar 21 dan hasil plot diagram *Campbell* data referensi studi kasus pada Gambar 22.



Gambar 21. Diagram Campbell sistem dual rotor hasil program komputasi



Gambar 22. Diagram Campbell sistem dual rotor referensi [8]

Perbandingan hasil 6 frekuensi pribadi pertama yang didapatkan pada referensi dan hasil perhitungan komputasi dapat dilihat pada Tabel 19.

Tabel 19. Perbandingan data frekuensi pribadi referensi dan perhitungan komputasi.

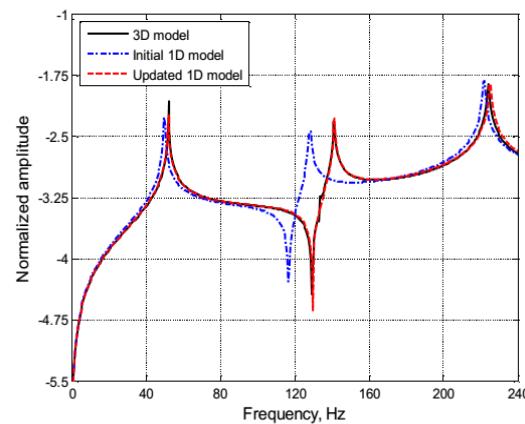
Model 3D (Hz)	Model 1D (Hz)	Perhitungan Komputasi (Hz)	Percentase Perbedaan (%)	
			3D	1D
50,315	48,145	50,015	0,595	3,886
50,348	48,145	50,015	0,660	3,886
137,25	124,98	133,066	3,048	6,470
137,55	124,98	133,066	3,259	6,470
240,75	235,94	235,039	2,372	0,382
242,02	235,94	235,039	2,862	0,359

Dapat diperhatikan pada Tabel di atas bahwa persentase perbedaan frekuensi pribadi pertama sekitar 0,595% sampai 3,259% pada model 3 dimensi, 0,359% sampai 6,470% pada model 1 dimensi. Perbandingan hasil kecepatan putaran kritis antara referensi dan data yang diperoleh melalui perhitungan komputasi dapat dilihat pada Tabel 20.

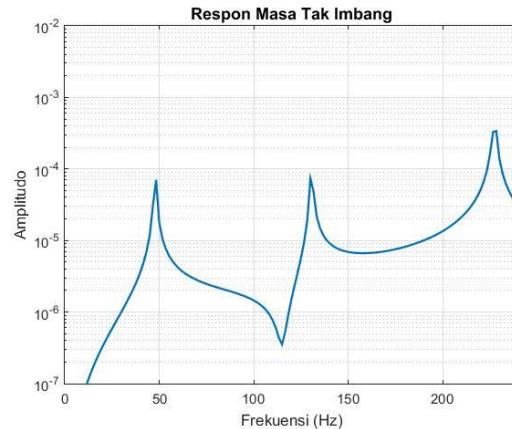
Tabel 20. Perbandingan data kecepatan putaran kritis referensi dan perhitungan komputasi

No	Model 3D (rpm)	Model 1D (rpm)	Komputasi (rpm)	Perbedaan (%)	
				3D	1D
1	3,139	2,988	3,155	0,83	5,59
2	8,534	7,738	8,151	4,49	5,53
3	13,712	13,479	13,625	0,63	1,08

Hasil prediksi respon massa tak imbang pada *disk 1* berdasarkan program yang disusun dapat dilihat pada Gambar 23 dan respon massa tak imbang dari studi kasus dapat dilihat pada Gambar 24.



Gambar 23. Prediksi respon massa tak imbang pada disk 1 referensi [8]



Gambar 24. Prediksi respon massa tak imbang pada disk 1

Dari kedua prediksi karakteristik dinamik yang didapatkan melalui program komputasi yang sudah disusun, hasilnya cenderung mendekati dengan pemodelan elemen 3 dimensi (3D). Hal ini menunjukkan bahwa program komputasi yang sudah disusun sudah bisa mewakili atau digunakan untuk berbagai kasus yang ada pada dunia industri. Perbandingan pemodelan elemen hingga, waktu yang digunakan untuk mendapatkan hasil prediksi karakteristik dinamik sistem *dual* rotor antara studi kasus dan penelitian ini dapat dilihat pada Tabel 21.

Tabel 21. Perbandingan penggunaan *CPU time* terhadap studi kasus.

Model Elemen	Tipe Analisis	Jumlah Elemen	Waktu Penggunaan CPU, detik
Model 3D	Diagram <i>Campbell</i>		2.098
	Respon massa tak imbang	92.810	208.500
Model 1D	Diagram <i>Campbell</i>		1,002
	Respon massa tak imbang	11	1,016
Rasio	Diagram <i>Campbell</i>		2.093
	Respon massa tak imbang	8.437	205.216,53

Berdasarkan Tabel 21, program yang sudah disusun dapat menghemat penggunaan waktu *CPU* yang sangat baik, rasio yang didapatkan antara pemodelan 3D dan 1D sebesar 2.093 kali untuk mendapatkan diagram *Campbell* dan untuk respon massa tak imbang sebesar 205.216,53 kali.

Kesimpulan

Berdasarkan kajian yang telah dilakukan, didapatkan beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Penyusunan matriks lokal sistem *monorotor* dan *dual rotor* sama, hanya terdapat perbedaan ketika menyusun matriks global yang dipengaruhi oleh bantalan antar poros (*intershaft bearing*).
2. Persentase harga yang diperoleh antara program komputasi yang disusun dan harga berdasarkan referensi sekitar 0,11 % - 6,6 % untuk sistem single rotor, dan 0,15 % - 3,9 % untuk sistem *dual rotor*. Sedangkan perbedaan persentase harga terhadap studi kasus model 3D sebesar 0,595% - 4,488%, dan terhadap studi kasus model 1D sebesar 0,359% - 6,470%.
3. Program komputasi yang dibuat mampu menghemat waktu *CPU* sebesar 2.093 kali untuk mendapatkan diagram *Campbell* dan 205.016,53 kali.
4. Program komputasi yang sudah dibuat cenderung lebih mendekati dengan model 3D, sehingga program komputasi yang sudah dibuat mampu mewakili pemodelan sistem 3D.
5. Program komputasi yang sudah disusun dapat membantu dalam menganalisis karakteristik dinamik untuk sistem single rotor dan *dual rotor*.

Referensi

- [1] Adams, M., 1980, Nonlinear Dynamic of Multibearing Flexible Rotors, Journal Sound and Vibration, Volume 71(1), 129-144.
- [2] Dokainish, M. A., 1972, A New Approach for Plate Vibration: Combination of Transfer Matrix and Finite-Element Technique, Journal of Engineering Industry, Volume 94, pp. 526-530.
- [3] Fei, Z. X., et al, 2013, Investigation of The Dynamic Characteristic of Dual Rotor System and Its Start-Up Simulation Based on Finite Element Method, Journal of Zhejiang University-Science.
- [4] Zulhendri, H., 2001, Studi Perbandingan Metode Modal Testing Klasik dan Modal Testing Kompleks Dengan Metode Analitik dalam Identifikasi Arah Whirling Orbit Sistem Rotor, (Tesis Magister), Institut Teknologi Bandung.
- [5] Huang, Y. M., and Ching-Ming, W., 2001, Combined Methodology for Analysis of Rotary System, Journal of Vibration and Acoustic.
- [6] Ismail, 2004, Kaji Numerik Karakteristik Dinamik Sistem Poros-Rotor Mesin Penggiling (*Hammermill*) Menggunakan Pemodelan Elemen Hingga, Skripsi, Universitas Lampung.
- [7] Lalane, M., and Ferraris, G., 1990, Rotordynamics Prediction in Engineering, John Wiley and Sons Inc..
- [8] Miao, H., et al, 2014, Model Updating and Validation of a Dual-Rotor System. Proceedings of ISMA Including USD2014, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing.
- [9] Nelson, H. D., 1980, A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory, Journal of Mechanical Design Volume 102, pp 793-803.
- [10] Rao, S. S., 2011, The Finite Element Method in Engineering Fifth Edition. Elsevier Inc.
- [11] Yanto, A, dan Hidayat, R., 2014, Analisis Perilaku Dinamik Sistem Poros Rotor 3D, Jurnal Teknik Mesin, Volume 4, No.2, Oktober 2014: 75-83.