

## M6-017 INTERAKSI FLUIDA-STRUKTUR

### MODELISASI dan SIMULASI NUMERIK BI-DIMENSIONAL

Pendekatan Teoritis Gerak Fluida dalam Struktur Silindris Simetris

Danardono A. Sumarsono

Departemen Teknk Mesin Unversitas Indonesia

Kampus UI Depok Jawa Barat 16424, INDONESIA

Phone: 62-21-7270032, FAX: 62-21-7270033, E-mail: [danardon@eng.ui.ac.id](mailto:danardon@eng.ui.ac.id)

### ABSTRAK

*Penelitian ini memperlihatkan kemungkinan melakukan analisis numerik beda hingga perambatan gelombang tekanan fluida didalam lingkungan ber dinding simetris dan elastis. Persamaan dasar 3 dimensi suatu lenturan cangkang tipis (thin shell flexion) serta penerapan hipotesis menurut Reissner (Improved Plate Theory/IPT) digunakan untuk penyelesaian gerak struktur dinding pipa. Fungsi-fungsi yang menjadikan bentuk pergerakan dari dinding pipa hanya tergantung dari dua variabel yaitu waktu ( $t$ ) dan absis ( $x$ ). Sedangkan untuk gerakan kecil suatu fluida dalam wadah silindris (cylindrical liquid confined) lebih disesuaikan menggunakan kaidah/prinsip konservasi enersi serta kaidah Hamilton. Gelombang datar tunggal impulsif berbentuk setengah sinusiodal digunakan dalam perhitungan ini sebagai bagian dari pembebanan inisial pada ujung pipa. Dengan menerapkan deformasi dinding pipa sama dengan nol (dinding pipa mempunyai ketebalan tidak terbatas) maka terbentuk hipotesis pipa non deformable, dimana analisis kuantitatif menunjukkan perbedaan nilai tekanan maksimum untuk seluruh evolusi sebesar 0,1% dengan kondisi stabilitas dan konvergensi pada tingkat ketelitian yang cukup baik dan tercapai pada  $\Delta t < 0,666(\Delta x/C_0)$ . Fenomena ini identik dengan solusi persamaan nondimensional perambatan gelombang datar (Plane Wave Propagation).*

*Keywords : Interaksi fluida-struktur, Teori Plat Reissner, Persamaan Helmholtz, Prinsip Hamilton, Metode Beda Hingga, Dispersi Geometrik, Plane Wave Propagation*

### 1. Pendahuluan

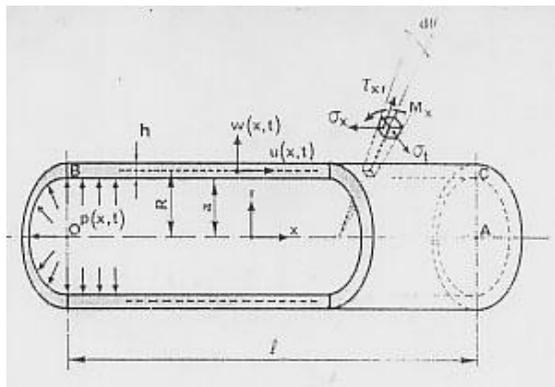
Analisis interaksi fluida struktur sering digunakan di dalam masalah yang menyangkut dinamika aliran fluida yang dibatasi oleh suatu dinding kontinu. Sebagai salah satu contohnya adalah analisis perambatan gelombang fluida di dalam pipa atau yang lebih dikenal dengan sebutan *waterhammer*. Industri yang memanfaatkan struktur pipa silindris sebagai alat penyimpanan atau sebagai alat transportasi fluida mudah terbakar (minyak bumi, gas bumi, zat kimia dsb) pada umumnya akan menemui masalah yang sangat erat kaitannya dengan kekuatan dan keamanan struktur pipa. Terutama pada saat mengalami pembebanan baik yang datang dari dalam maupun dari lingkungan luar pipa. Analisa kecelakaan pada inti reaktor nuklir yang juga merupakan analisa pada LMFBR (*Liquid Metal Fast Breeder Reactor*)

mengisyaratkan bahwa suatu energi dengan jumlah yang sangat besar akan dilepaskan secara mendadak dalam kurun waktu yang sangat singkat dalam pipa utama (impuls).

## 2. Dinamika Struktur Tubuler Silindris Elastis

### 2.1. Geometrik dan Parameter Mekanikal

Gambar 1. memperlihatkan suatu bentuk struktur tubuler silindris dengan panjang  $l$ , jari-jari  $r$ , tebal dinding pipa  $h$ . Dalam mengantisipasi teori cangkang tipis (*Thin Shell Theory*), tebal dinding pipa diasumsikan sangat kecil dibandingkan jari-jarinya. Karakteristik mekanik material yang diperlukan dalam perhitungan adalah : Massa Jenis  $\rho$ , Modulus Elastisitas  $E$  dan koefisien *Poisson*  $\nu$ . Dalam hal ini juga dibutuhkan Modulus Geser  $G = E/2(1+\nu)$  dan kekakuan dari cangkang  $D = E \cdot h^3 / \{12(1-\nu^2)\}$ . Fungsi-fungsi yang menjadikan bentuk pergerakan dari dinding tube hanya tergantung dari waktu ( $t$ ) dan absis ( $x$ ).



Gambar 1. Karakteristik Dinding Pipa Silindris

### 2.2. Hipotesis Kelakuan Material Struktur Pipa

Untuk menerapkan prinsip-prinsip yang sangat lebih mendetail, biasanya digunakan tiga prinsip model reologi yaitu : Elastisitas, Viskositas dan Plastisitas. Dalam beberapa kasus model tersebut sangat kompleks dan sukar diuraikan. Elastisitas ideal adalah merupakan suatu pendekatan yang cukup berasalan (*valid*) untuk sejumlah kasus mekanika solid suatu deformasi yang sangat kecil. Dalam kasus tersebut, deformasi elastik akan terjadi sebagai akibat dari suatu beban (gaya) dan secara beraturan akan kembali normal apabila beban ditiadakan. Oleh sebab itu hipotesis elastisitas dipilih sebagai suatu pertimbangan logis studi penelitian ini.

### 2.3. Persamaan Gerak Struktur Dinding Pipa

Persamaan dasar tiga dimensi suatu plat yang melentur seperti cangkang kerang (shell flexion) yang menerapkan hipotesis *Reissner* atau lebih dikenal dengan "*Improved Plate Theory (IPT)*" secara umum dapat ditulis :

$$\frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho \cdot h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k \cdot G \cdot h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \frac{1}{R} \left( \frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = p(x, t)$$

$$\frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - k \cdot G \cdot h \left( \psi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\rho \cdot h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

*Chonan S. [2] dan Herrmann [3]*

### 3. Gerakan Kecil Suatu Fluida Berbentuk Silindris (Cylindrical Liquid Confined).

#### 3.1. Hipotesis Untuk Fluida

- Fluida yang dihitung adalah fluida dengan densitas dimana variasi perubahan Massa Volume ( $\Omega$ ) dipertimbangkan sangat kecil. Perubahan tersebut hanya bergantung dari variasi tekanan saja. Akibatnya waktu untuk diffusi kalor (Thermal Diffusion Time) sangat lama dibandingkan dengan waktu perambatan gelombang tekanan. Dalam hal ini diasumsikan bahwa kompresinya adalah adiabatik. Kompresibilitas fluida akan dinyatakan melalui perantara modulus kompresibilitas B yang menyatakan penurunan linear suatu volume fluida sebagai fungsi dari tekanan yang terjadi.
- Fluida diasumsikan sempurna, akibatnya bahwa seluruh tegangan yang berhubungan dengan viskositas dapat diabaikan. Dalam kasus ini, gaya gesekan antara fluida dengan dinding dalam pipa tidak dihitung.
- Fluida mengisi secara utuh volume pipa, sehingga sistem dapat diasumsikan sebagai satu fase (*monofase liquid*) tanpa terjadi (kavitasi).

#### 3.2. Persamaan Dasar Dinamika Fluida

Menurut prinsip *Hamilton*, prinsip dimana mengekspresikan energi kinetik dan potensial dari fluida, untuk suatu volume V fluida dapat didefinisikan energi Kinetik  $E_c$  berdasarkan pergerakan (displacement)  $\vec{u}_\ell$  suatu partikel fluida adalah sebagai berikut :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \Omega \left( \frac{d\vec{u}_\ell}{dt} \right)^2 dV$$

dimana  $\Omega$  adalah massa volume fluida

serta ekspresi Energi Potensial dari deformasi  $E_p$  terhadap kompresibilitas :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_V \frac{p^2}{B} dV$$

Volume V dibatasi suatu permukaan S dimana dinyatakan melalui notasi gaya normal eksternal  $n$ .

Tekanan eksternal terhadap permukaan S menimbulkan suatu kerja  $W_e$  :

$$W_e = \int_S \vec{u}_\ell p_S \vec{n} dS$$

Prinsip Variasional *Hamilton* dapat ditulis :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(E_c - E_p) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_e dt = 0$$

Untuk suatu variasi displacement fluida  $\delta \vec{u}_\ell$  dan dengan kaidah kompresibilitas maka dapat dijabarkan hubungan antara tekanan dengan ekspansi fluida sebagai suatu fungsi persamaan dengan Modulus Kompresibilitas B ;

$$p = -B \operatorname{div} \vec{u}_\ell$$

Dengan memasukkan persamaan di atas ke dalam ekspresi enersi potensial  $E_p$ , :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_V B (\operatorname{div} \vec{u}_\ell)^2 dV$$

Dalam hal ini dapat dicari ekspresi berbagai variasi dari :

$$\delta E_c, \delta E_p \text{ dan } \delta W_e.$$

- Menghitung  $\delta E_c$  :

$$\delta E_c = \int_V \Omega \frac{d\vec{u}_\ell}{dt} \delta \left( \frac{d\vec{u}_\ell}{dt} \right) dV$$

dalam bentuk Integral parsial :

$$\int_{t_1}^{t_2} \Omega \frac{d\vec{u}_\ell}{dt} \frac{d}{dt} (\delta \vec{u}_\ell) dt = \Omega \frac{d\vec{u}_\ell}{dt} \delta \vec{u}_\ell \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \Omega \frac{d^2 \vec{u}_\ell}{dt^2} \delta \vec{u}_\ell dt$$

variasi  $\vec{u}_\ell$  adalah nol untuk  $t_1$  dan  $t_2$

sehingga :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E_c dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \Omega \frac{d^2 \vec{u}_\ell}{dt^2} \delta \vec{u}_\ell dV dt$$

- Menghitung  $\delta E_p$

$$\delta E_p = \int_V B \operatorname{div} \vec{u}_\ell (\operatorname{div} \vec{u}_\ell) dV = \int_V -p \operatorname{div} \delta \vec{u}_\ell dV$$

Diketahui bahwa;

$$\operatorname{div}(p \delta \vec{u}_\ell) = \delta \vec{u}_\ell \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} p + p \operatorname{div} \vec{u}_\ell$$

dengan menggunakan teori *Green-Ostrogradsky*, maka ekspresi variasi energi potensial menjadi *Chohan RK [1]*:

$$\delta E_p = \int_S -p \delta \vec{u}_\ell \vec{n} dS + \int_V \overrightarrow{\operatorname{grad}} p \cdot \delta \vec{u}_\ell dV$$

- Menghitung  $\delta W_e$

$$\delta W_e = \int_S \delta \vec{u}_\ell p_S \vec{n} dS$$

Pada akhirnya prinsip *Hamilton* dapat ditulis sebagai :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta E_c - \delta E_p + \delta W_e) dt = 0$$

atau

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_V (-\Omega \vec{u}_\ell - \overrightarrow{\text{grad}} p) dV \delta \vec{u}_\ell + \int_S (-p \vec{n} dS + p_S \vec{n} dS) \delta \vec{u}_\ell \right) dt = 0$$

Ekspresi tersebut adalah nol untuk suatu harga  $t_1$  dan  $t_2$ , serta

$$\begin{aligned} \Omega \vec{u}_\ell + \overrightarrow{\text{grad}} p &= 0 && \text{dalam volume } V, \\ p &= -B \text{ div } \vec{u}_\ell && \text{dalam volume } V, \\ p_S &= -B \text{ div } \vec{u}_\ell && \text{pada permukaan } S \end{aligned}$$

Jika dianggap bahwa  $B$  adalah konstan dan  $\Omega$  tidak tergantung terhadap variabel ruang, maka didapat persamaan tekanan fluida sbb :

$$p = -B \text{ div} \left( -\frac{\overrightarrow{\text{grad}} p}{\Omega} \right) = -\frac{B}{\Omega} \text{ div} (\overrightarrow{\text{grad}} p)$$

atau

$$\ddot{p} = \frac{B}{\Omega} \Delta p$$

dengan mengikuti teori dekomposisi *Helmoltz*, untuk suatu medan kecepatan  $\vec{v}$ , maka dapat ditulis

$$\forall \vec{v}, \exists \Phi \text{ et } \exists \vec{\Psi}$$

dimana

$$\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \Phi + \overrightarrow{\text{rot}} \psi$$

$\vec{v}$  adalah vektor kecepatan suatu partikel pada titik  $M$  dalam fluida. Medan vektor  $\vec{v}$  diasumsikan *irrotational*, yang hanya tergantung skalar potensial  $\Phi(x, y, z)$ ;

$$\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \Phi$$

atau

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

dimana  $u_x$ ,  $u_y$ , et  $u_z$  adalah komponen displacement fluida mengikuti sumbu  $(x, y, z)$  dan menggunakan hipotesis sumbu simetris (Gambar 2) :

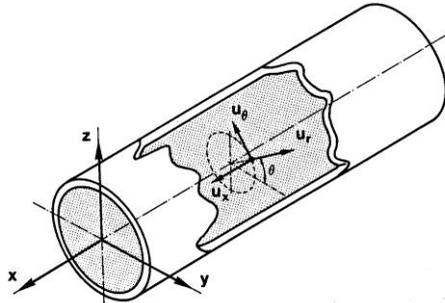
$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$u_\theta = 0$  dan derivatifnya terhadap  $\theta$  adalah nol

Persamaan perambatan gelombang dalam notasi potensial kecepatan  $\Phi$  dapat ditulis :

$$\Delta\Phi = \frac{1}{C_0^2} \Phi$$

$$\text{atau} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$



Gambar 2. Titik fluida dalam koordinat silindris

#### 4. Modelisasi dengan Metode Beda Hingga

##### 4.1. Diskretisasi

Fungsi yang dipilih untuk struktur pipa dalam hal ini adalah *displacement*:  $u$ ,  $w$  (dan  $\psi$  dalam hipotesis *Reissner/ IPT*), dan untuk liquid adalah potential kecepatan  $\Phi$ . Karena masih dalam asumsi sumbu simetris, maka hanya satu fungsi ruang  $x$  saja yang diperlukan untuk menyatakan pergerakan dari struktur pipa, sedangkan dua fungsi diperlukan untuk sub-domain liquid ( $x$  dan  $r$ ). Pencacahan terhadap waktu ( $t$ ) dan ruang ( $x, r$ ) dapat menggantikan fungsi kontinu seperti  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$ ,  $\psi(x, t)$ ,  $\Phi(x, r, t)$ .

##### 4.2. Diskretisasi untuk Fluida

Gambar 3. menunjukkan sistem diskretisasi atas gerakan evolusi fluida yang dianalisis. Dalam diskretisasi segiempat beraturan ( $\Delta x$ ,  $\Delta r$ ), digunakan ruang ( $x$ ,  $r$ ) yang terletak antara nilai awal ( $x = 0$ ,  $r = 0$ ) dan nilai akhir ( $x_{\text{fin}} = \text{panjang pipa}$  dan  $r_{\text{fin}} = a$ ). Dengan mengekspresikan metode beda hingga klasik dalam bentuk “center” dengan :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\dots}{2\Delta x} \quad \{-1 \quad 0 \quad 1\}$$

arah horizontal ;

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\dots}{(\Delta x)^2} \quad \{1 \quad -2 \quad 1\}$$

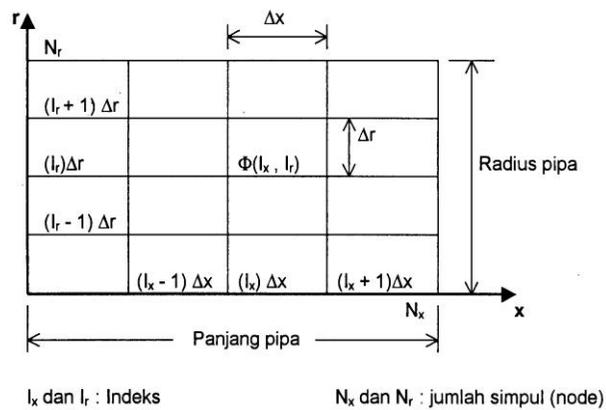
$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\dots}{2\Delta r} \quad \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right\}$$

dan arah vertikal ;

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\dots}{(\Delta r)^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$\Phi$  merupakan medan kecepatan potensial pada saat “t” yang kemudian disebut  $\Phi_p$  atau potensial pada saat  $(t - \Delta t)$  sebelumnya dan  $\Phi_s$  adalah potensial pada saat  $(t + \Delta t)$  berikutnya. Dalam kondisi demikian didapat hubungan antara medan kontinu dan nilai diskretnya sebagai berikut;

$$\begin{aligned} \Phi(x, r, t - \Delta t) &\rightarrow \Phi_p(I_x, I_r) \\ \Phi(x, r, t) &\rightarrow \Phi(I_x, I_r) \\ \Phi(x, r, t + \Delta t) &\rightarrow \Phi_s(I_x, I_r) \end{aligned}$$



Gambar 3. Diskretisasi model fluida

### 4.3. Persamaan Aljabar pada Titik Diskret

Ekspresi persamaan hiperbola perambatan gelombang dalam koordinat silindris tersebut di atas untuk setiap titik diskretnya adalah sebagai berikut ;

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = C_0^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\Phi_s(I_x, I_r) - 2\Phi(I_x, I_r) + \Phi_p(I_x, I_r)}{(\Delta t)^2} \\ &= C_0^2 \left[ \frac{\Phi(I_x, I_r - 1) - 2\Phi(I_x, I_r) + \Phi(I_x, I_r + 1)}{(\Delta r)^2} + \frac{\Phi(I_x, I_r - 1) - \Phi(I_x, I_r + 1)}{2r\Delta r} + \frac{\Phi(I_x - 1, I_r) - 2\Phi(I_x, I_r) + \Phi(I_x + 1, I_r)}{(\Delta x)^2} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

Dengan demikian jelas bahwa setiap nilai  $\phi_S$  merupakan linearisasi dari fungsi  $\phi_p$  dan nilai-nilai yang diambil melalui  $\Phi$  untuk setiap titik nodal di sebelahnya dapat ditulis :

$$\phi_S(I_X, I_r) = -\phi_p(I_X, I_r) + A_c \cdot \phi(I_X, I_r) + A_g \cdot \phi(I_X - 1, I_r) + A_d \cdot \phi(I_X + 1, I_r) + A_b \cdot \phi(I_X, I_r - 1) + A_h \cdot \phi(I_X, I_r + 1) \quad (2)$$

Dimana  $A_c = C_0^2 \left\{ -\frac{2(\Delta t)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \right\} + 2$

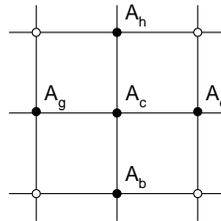
$$A_g = C_0^2 \left\{ \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \right\}$$

$$A_d = C_0^2 \left\{ \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \right\}$$

$$A_b = C_0^2 \left\{ \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta r)^2} + \frac{(\Delta t)^2}{2r \cdot \Delta r} \right\}$$

$$A_h = C_0^2 \left\{ \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\Delta t)^2}{2r \cdot \Delta r} \right\}$$

Gambar 4 memperlihatkan posisi koefisien potensial ( $A_b, A_c, A_d, A_g, A_h$ ). Terlihat bahwa nilai  $A_b$  dan  $A_h$  bervariasi sepanjang jari-jari. Hal ini memungkinkan menggantikan  $r$  dengan  $I_r \cdot \Delta r$ . Langkah untuk mendapatkan  $\Phi_S$  akan berulang terus secara analogi untuk seluruh titik didalam domain. Untuk mendapatkan titik yang terletak pada dinding batas, maka perlu menentukan terlebih dahulu kondisi batas.



*Gambar 4. Koefisien potensial dalam ekspresi diskretisasi propagasi*

#### 4.4. Kondisi Batas

a. Sumbu pipa (OA) adalah simetris, sehingga kecepatan radialnya sama dengan nol :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$$

b. Persamaan perambatan gelombang mempunyai bentuk  $\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$  yang dinyatakan dalam bentuk yang tidak dapat diuraikan. Namun demikian dengan bantuan deret Taylor maka dapat dituliskan pendekatannya sebagai berikut :

$$\Phi(r) = \Phi(-r)$$

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_r = r \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right)_0 + r \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right)_0 + \frac{r^2}{2!} \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} \right)_0 + \frac{r^3}{3!} \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} \right)_0 + 0(r^3)$$

$$= 0 + r \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right)_0 + 0 + \frac{r^3}{3!} \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} \right)_0 + 0(r^3)$$

Dalam bentuk linear sederhana ditulis :

# Seminar Nasional Tahunan Teknik Mesin (SNTTM) VIII

Universitas Diponegoro, Semarang 11-12 Agustus 2009

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_r = r \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right)_0 \quad \text{atau} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right)_0 \quad (3)$$

Dengan memasukkan pers (3) dalam pers (1), maka didapat ekspresi ekuivalen pada sumbu (OA) sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = C_0^2 \left( 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \right) \quad (4)$$

yang pada dasarnya merupakan persamaan yang sama pada persamaan (2) dimana koefisiennya merupakan nilai-nilai baru seperti :

$$A_c = C_0^2 \left\{ -\frac{4(\Delta t)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \right\} + 2$$

$$A_g = C_0^2 \left\{ \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \right\} \quad A_b = C_0^2 \left\{ \frac{2(\Delta t)^2}{(\Delta r)^2} \right\}$$

$$A_d = C_0^2 \left\{ \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \right\} \quad A_h = C_0^2 \left\{ \frac{2(\Delta t)^2}{(\Delta r)^2} \right\}$$

c. Pada ujung pipa dianggap kaku dan tetap. Komponen kecepatan longitudinal fluida adalah nol. Sehingga dapat dinyatakan kondisi batas AC adalah :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{atau} \quad \Phi(N_x - 1, I_r) = \Phi(N_x + 1, I_r)$$

untuk  $I_r = 0, \dots, N_r$

Hal ini akan mempermudah mendefinisikan potensial  $\Phi(N_x + 1, I_r)$  pada titik-titik imajiner yang terletak pada batas jarak  $\Delta x$ .

## 4.5. Pembebanan awal (Kondisi Inisial)

Dianggap bahwa kondisi inisial atau dalam hal ini merupakan pembebanan pada ujung awal pipa adalah simetris, maka pada OB dapat diasumsikan adanya tekanan  $p(0,r,t)$ . Secara umum tekanan ini berhubungan dengan potensial melalui bentuk :

$$p = \Omega \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (5a)$$

Akibatnya pada seluruh titik nodal fluida berlaku hubungan :

$$\Phi(t) = \frac{1}{\Omega} \int_0^t p(t) dt \quad (5b)$$

Ekspresi tersebut secara khusus sudah sesuai pada batas OA sehingga untuk setiap titik diskretnya dapat ditulis secara umum :

$$\Phi(0, I_r) = \frac{1}{\Omega} \int_0^t p(0, I_r) dt \quad (5c)$$

## 4.6. Diskretisasi Dinding Pipa

Diskretisasi longitudinal dapat menggambarkan gerakan dinding pipa yang dalam hal ini cukup hanya dengan mengenal fungsi  $w(x,t)$ ,  $u(x,t)$ ,  $\psi(x,t)$  sebagai bentuk displacement dari suatu titik M yang terletak pada suatu koordinat dengan satu

variabel ruang  $x$ . Interaksi antara fluida dan dinding pipa akan dinyatakan dalam satu kesatuan terhadap titik  $M(I_x, I_r)$  dimana :

$$I_x = 0, \dots, N_x \quad \text{dan} \quad I_r = N_r$$

Dengan menggunakan notasi displacement  $w, u, \psi$ , untuk saat  $t$ , serta displacement  $w_p, u_p, \psi_p$  adalah displacement pada saat  $(t - \Delta t)$  sebelumnya dan  $w_s, u_s, \psi_s$  adalah displacement pada saat  $(t + \Delta t)$  berikutnya, maka didapat suatu hubungan antara medan kontinu dan nilai diskretnya.

### 4.7. Persamaan Aljabar Dinding Pipa

Dengan menganggap variabel di bawah ini sebagai :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{E}{\rho(1-v^2)} & C_5 &= \frac{k \cdot G}{\rho} & C_9 &= \frac{\eta}{\rho \cdot h} \\ C_2 &= \frac{12 \cdot k \cdot G}{\rho \cdot h^2} & C_6 &= -C_5 & C_{10} &= \frac{-\Omega}{\rho \cdot h} \\ C_3 &= -C_2 & C_7 &= -C_4 \\ C_4 &= \frac{v}{a} C_1 & C_8 &= -\frac{C_1}{a^2} \end{aligned}$$

maka persamaan lengkap pergerakan dinding pipa dalam bentuk barunya dapat ditulis sebagai berikut ;

$$(IV) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= C_1 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + C_2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) + C_3 \cdot \psi \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= C_1 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + C_4 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= C_5 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + C_6 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + C_7 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + C_8 w - C_9 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) - C_{10} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \right.$$

Dalam persamaan ini, tekanan yang terjadi pada dinding pipa juga merupakan tekanan yang terjadi terhadap fluida dan ditulis sebagai tekanan inisial pipa :

$$p = \frac{1}{\Omega} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

Sehingga didapatkan persamaan aljabar (IV-a) yang ada hubungannya dengan nilai diskret seluruh displacement ;

$$\begin{aligned}
& \psi_s(I_x) = 2\psi(I_x) - \psi_p(I_x) + C_1 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \{\psi(I_x + 1) - \psi(I_x) + \psi(I_x - 1)\} \\
& \quad + C_2 \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta x} \{w(I_x + 1) - w(I_x + 1)\} + C_3 (\Delta t)^2 \cdot \psi(I_x) \\
& u_s(I_x) = 2u(I_x) - u_p(I_x) + C_1 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \{u(I_x + 1) - u(I_x) + u(I_x - 1)\} \\
& \quad + C_4 \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta x} \{w(I_x + 1) - w(I_x + 1)\} \\
& w_s(I_x) = 2w(I_x) - w_p(I_x) + C_5 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \{w(I_x + 1) - w(I_x) + w(I_x - 1)\} \\
& \quad + C_6 \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta x} \{\psi(I_x + 1) - \psi(I_x + 1)\} + C_7 \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta x} \{u(I_x + 1) - u(I_x + 1)\} \\
& \quad + C_8 (\Delta t)^2 \cdot w(I_x) - C_9 \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta x} \{w_s(I_x) - w_p(I_x)\} \\
& \quad - C_{10} \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta x} \{\Phi_s(I_x, N_r) - \Phi_p(I_x, N_r)\}
\end{aligned}
\tag{IV - a}$$

dengan menganggap parameter berikut ini adalah :

$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_8 \cdot (\Delta t)^2 & C_{14} &= C_3 \cdot (\Delta t)^2 & C_{17} &= C_6 \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta x} & C_{20} &= C_{10} \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta t} \\
C_{12} &= C_1 \cdot \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} & C_{15} &= C_4 \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta x} & C_{18} &= C_7 \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta x} \\
C_{13} &= C_2 \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta x} & C_{16} &= C_5 \cdot \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} & C_{19} &= C_9 \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta t}
\end{aligned}$$

persamaan (IV-a) dapat disederhanakan :

$$\begin{aligned}
& \psi_s(I_x) = -\psi_p(I_x) + (2 - 2C_{12} + C_{14})\psi(I_x) + C_{12}\{\psi(I_x + 1) + \psi(I_x - 1)\} \\
& \quad + C_{13}\{w(I_x + 1) - w(I_x + 1)\} \\
& u_s(I_x) = -u_p(I_x) + (2 - 2C_{12}) \cdot u(I_x) + C_{12}\{u(I_x + 1) + u(I_x - 1)\} \\
& \quad + C_{15}\{w(I_x + 1) - w(I_x + 1)\} \\
& (1 + C_{19})w_s(I_x) = (C_{19} - 1)w_p(I_x) + (2 - 2C_{16} + C_{11})w(I_x) \\
& \quad + C_{16}\{w(I_x + 1) - w(I_x + 1)\} + C_{17}\{\psi(I_x + 1) - \psi(I_x + 1)\} \\
& \quad + C_{18}\{u(I_x + 1) - u(I_x + 1)\} - C_{20}\{\Phi_s(I_x, N_r) - \Phi_p(I_x, N_r)\}
\end{aligned}
\tag{IV - b}$$

#### 4.8. Kondisi Batas pada Ujung Pipa

Studi penelitian yang dilakukan *Renard J.* [4] memperlihatkan bahwa kondisi yang diakibatkan adanya pergerakan arah  $u$  adalah yang terpenting diantara pergerakan

displacement lainnya kecuali yang terletak langsung pada ujung pipa. Didasari pada kemudahan penguraian persoalan, maka kondisi berikut ini adalah homogen untuk :

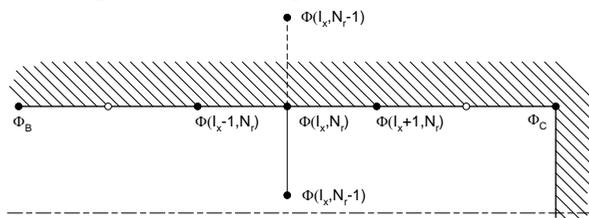
$$\begin{aligned} w(0) &= u(0) = \psi(0) = 0 \\ w(1) &= u(1) = \psi(1) = 0 \end{aligned}$$

### 4.9. Persamaan Aljabar Sistem Interaksi

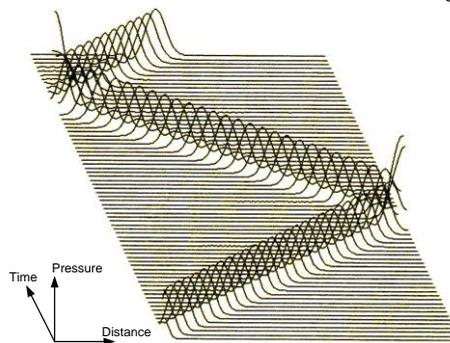
Pada daerah antar muka fluida-dinding dalam pipa, dianggap bahwa ada kesinambungan pergerakan kecepatan radial dinding dalam pipa dan fluida sehingga pada BC terdapat hubungan :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=a} \quad (6)$$

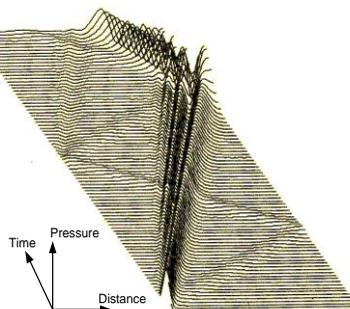
Gambar 5. memperlihatkan kondisi antar batas fluida dengan dinding dalam pipa dimana  $\Phi(I_x, N_r+1)$  adalah potensial fiktif pada daerah antar batas (frontier).



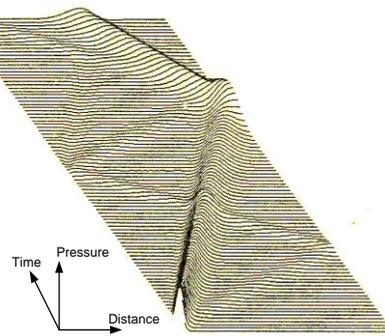
Gambar 5. Kondisi antar batas Fluida-Dinding dalam Pipa



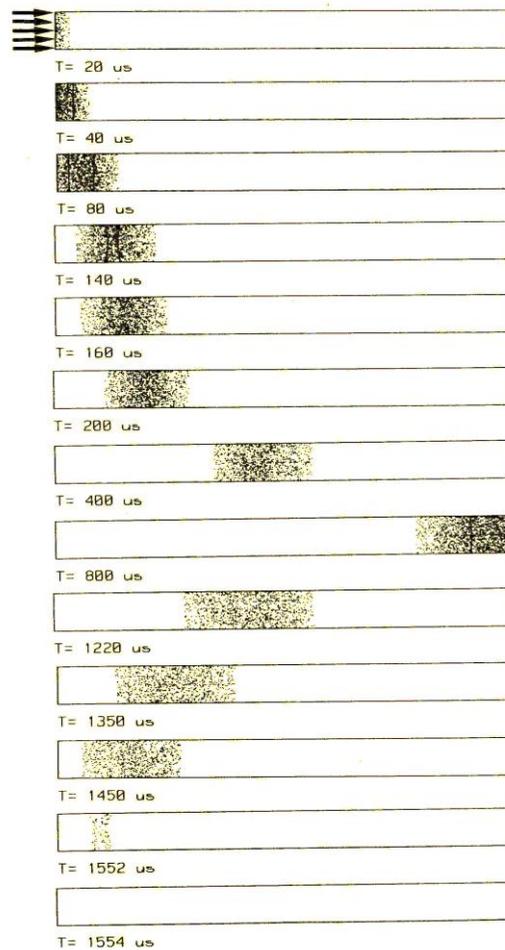
Gambar 6. Evolusi gelombang tekanan dalam pipa non-deformabel



Gambar 7. Evolusi gelombang tekanan: hipotesis menurut Reissner dan tanpa  $\eta$



Gambar 8. Evolusi gelombang tekanan : Hipotesis Reissner dengan  $\eta$



Gambar 9. Simulasi numerik propagasi gelombang tekanan dalam pipa, (titik menunjukkan terjadi tekanan yang sama/isobar)

# Seminar Nasional Tahunan Teknik Mesin (SNTTM) VIII

*Universitas Diponegoro, Semarang 11-12 Agustus 2009*

Dengan menggunakan nilai diskret sbb ;

$$\text{dan } \begin{matrix} I_x = 0, \dots, N_x \\ I_r = N_r \end{matrix}$$

maka kondisi batas tersebut dapat diuraikan melalui persamaan (6) dalam bentuk aljabarnya sebagai persamaan (7) berikut :

$$\frac{w_s(I_x) - w_p(I_x)}{2\Delta t} = \frac{\Phi(I_x, N_r + 1) - \Phi(I_x, N_r - 1)}{2\Delta r} \quad (7)$$

Dalam ekspresi derivasi kedua :

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right) = \frac{\Phi(I_x, N_r + 1) - 2\Phi(I_x, N_r) + \Phi(I_x, N_r - 1)}{(\Delta r)^2}$$

serta dengan menggantikan  $\Phi(I_x, N_r + 1)$  dengan nilai pada saat sebelumnya yang telah dihitung maka didapat hubungan :

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right) = \frac{2}{(\Delta r)^2} \{\Phi(I_x, N_r - 1) - \Phi(I_x, N_r)\} + \frac{1}{\Delta r \cdot \Delta t} \{w_s(I_x) - w_p(I_x)\} \quad (8)$$

Persamaan aljabar pasangan fluida-dinding dalam pipa untuk  $r = a$  adalah :

$$\Phi_s(I_x, N_r) = -\Phi_p(I_x, N_r) + (2 - 2C_{21} - 2C_{24})\Phi(I_x, N_r) + 2C_{21}\Phi(I_x, N_r - 1) + C_{24}\{\Phi(I_x + 1, N_r) + \Phi(I_x - 1, N_r)\} + C_{26}\{w_s(I_x) - w_p(I_x)\}$$

atau

$$\Phi_s(I_x, N_r) - C_{26}w_s(I_x) = -\Phi_p(I_x, N_r) + C_{25}\Phi(I_x, N_r) + 2C_{21}\Phi(I_x, N_r - 1) + C_{24}\{\Phi(I_x + 1, N_r) + \Phi(I_x - 1, N_r)\} + C_{26}w_p(I_x)$$

dimana :

$$\begin{matrix} C_{21} = C_0 \frac{2(\Delta t)^2}{(\Delta r)^2} & C_{23} = C_0 \frac{2\Delta t}{2 \cdot a} & C_{25} = (2 - 2C_{21} - 2C_{24}) \\ C_{21} = C_0 \frac{2\Delta t}{\Delta r} & C_{24} = C_0 \frac{2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} & C_{26} = (C_{22} + C_{23}) \end{matrix}$$

dengan menganggap bahwa :

$$\alpha = -\Phi_p(I_x, N_r) + C_{25}\Phi(I_x, N_r) + 2C_{21}\Phi(I_x, N_r - 1) + C_{24}\{\Phi(I_x + 1, N_r) + \Phi(I_x - 1, N_r)\} + C_{26}w_p(I_x)$$

didapat pada akhirnya suatu hubungan :

$$\Phi_S(I_x, N_r) = \alpha + C_{26}w_s(I_x) \quad (9)$$

Dengan menggunakan kondisi pasangan Fluida-Dinding dalam pipa yang telah diuraikan sebelumnya, maka persamaan aljabar sistem (IV-a) dapat ditulis :

$$\begin{aligned} \psi_s(I_x) &= -\psi_p(I_x) + C_{32}(I_x) + C_{12}\{\psi(I_x + 1) + \psi(I_x - 1)\} \\ &\quad + C_{13}\{w(I_x + 1) - w(I_x - 1)\} \\ u_s(I_x) &= -u_p(I_x) + C_{31} \cdot u(I_x) + C_{12}\{u(I_x + 1) + u(I_x - 1)\} \\ &\quad + C_{15}\{w(I_x + 1) - w(I_x - 1)\} \\ C_{27} \cdot w_s(I_x) + C_{28}\Phi_S(I_x, N_r) \\ &= C_{29}w_p(I_x) + C_{30}w(I_x) + C_{16}\{w(I_x + 1) - w(I_x - 1)\} \\ &\quad + C_{17}\{\psi(I_x + 1) - \psi(I_x - 1)\} + C_{18}\{u(I_x + 1) - u(I_x - 1)\} \\ &\quad + C_{28}\Phi_p(I_x, N_r) \end{aligned}$$

dimana ;

$$\begin{aligned} C_{27} &= (1 + C_{19}) & C_{30} &= (2 - 2 \cdot C_{16} + C_{11}) \\ C_{28} &= C_{20} & C_{31} &= (2 - 2 \cdot C_{12}) \\ C_{29} &= (C_{19} - 1) & C_{32} &= (2 - 2 \cdot C_{12} + C_{14}) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan parameter  $\square$  sebagai :

$$\begin{aligned} \beta &= C_{29}w_p(I_x) + C_{30}w(I_x) + C_{16}\{w(I_x + 1) - w(I_x - 1)\} \\ &\quad + C_{17}\{\psi(I_x + 1) - \psi(I_x - 1)\} + C_{18}\{u(I_x + 1) - u(I_x - 1)\} \\ &\quad + C_{28}\Phi_p(I_x, N_r) \end{aligned}$$

maka persamaan aljabar displacement radial menjadi

$$C_{27} \cdot w_s(I_x) + C_{28}\Phi_S(I_x, N_r) = \beta \quad (10)$$

dalam (9) dan (10) terlihat jelas hubungan suatu pasangan persamaan, sehingga dengan memasukkan (9) kedalam (10) didapat hubungan :

$$w_s(I_x) = \frac{\beta + C_{28} \cdot \alpha}{C_{27} - C_{26} \cdot C_{28}} \quad (11)$$

serta dengan menggantikan  $w_s(I_x)$  dalam ekspresi (9), maka didapat ekspresi potensial :

$$\Phi_S(I_x, N_r) = C_{33} \cdot \alpha + C_{34} \cdot \beta \quad (12)$$

dimana :

$$C_{33} = \frac{C_{27}}{C_{27} - C_{26} \cdot C_{28}} \quad \text{dan} \quad C_{34} = \frac{C_{26}}{C_{27} - C_{26} \cdot C_{28}}$$

Dengan demikian nilai  $\Phi_S$  dan  $w_s$  dapat diuraikan melalui uraian pasangan persamaan tersebut diatas dan pada akhirnya masalah interaksi F-S dapat terselesaikan.

## 5. Analisis Numerik Beban Gelombang Ideal.

### 5.1. Profil Evolusi Gelombang terhadap Beban Tunggal Impulsif Setengah Gelombang.

Dalam modelisasi perhitungan numerik ini digunakan bahasa program *HT-BASIC* dgn data masukan awal yang logis dan sederhana. Sebuah gelombang datar tunggal impulsif berbentuk setengah sinusoidal digunakan dalam perhitungan ini sebagai bagian dari pembebanan inisial pada ujung pipa. Gelombang ini akan merambat disepanjang pipa serta akan membentuk profil evolusi gelombang sesuai dengan hipotesis yang diterapkan.

### 5.2. Kasus Pipa Berdinding Sangat Tebal

Dengan menerapkan displacement dinding pipa sama dengan nol kedalam perhitungan numerik, maka didapatkan hipotesis dinding pipa non deformabel. Dalam hal ini gelombang akan merambat sepanjang pipa dengan tetap menjaga bentuk gelombang seperti pada saat bentuk inisialnya. Fenomena ini identik dengan solusi persamaan nondimensional perambatan gelombang datar (*Plane Wave Propagation*). Gambar 6. menunjukkan gambaran evolusi perambatan gelombang yang dimaksud. Terlihat jelas bahwa gelombang merambat sepanjang pipa dengan bentuk yang identik di setiap saat. Analisis kuantitatif menunjukkan perbedaan nilai tekanan maksimum untuk seluruh evolusi sebesar 0,1% dan kecepatan perambatannya konstan sama dengan kecepatan teoritis perambatan gelombang dalam fluida (1421 m/s) dan respon perhitungan tidak menunjukkan adanya gerakan osilasi yang secara teoritis merupakan suatu penyelesaian numerik *divergensi* (bias). Perhitungan teoritis di atas dilakukan menggunakan kondisi stabilitas  $\Delta t \leq 0,666 \cdot \Delta x / C_0$  (dimana  $\Delta x = \Delta t$ ). Dengan kondisi ini perhitungan numerik menunjukkan konvergenitas dan tingkat ketelitian yang cukup baik. *DA Sumarsono [5]*.

### 5.3. Kasus Pipa Elastis tanpa dan dengan redaman viskos $\eta$

Gambar 7. memperlihatkan evolusi gelombang ideal dengan menggunakan hipotesis Reissner tanpa redaman viskos  $\eta$ . Sedangkan Gambar 8. menunjukkan evolusi yang sama tetapi dengan memberikan nilai  $\eta = 4,5 \cdot 10^5 \text{ kg/s/m}^2$  dalam perhitungan numerik. Dibandingkan dengan evolusi sebelumnya dapat diamati hal-hal sebagai berikut; adanya redaman osilasi di depan gelombang, terjadinya alterasi tekanan maksimum, dan dispersi gelombang. Analisis kecepatan perambatannya meningkat sebesar 2,4% dibandingkan kecepatan gelombang tanpa redaman viskos *DA Sumarsono [7]*. Dalam kedua gambar tsb dapat pula diamati fenomena perambatan gelombang *precursor*, yaitu suatu gelombang yang merambat dengan kecepatan sama dengan kecepatan teoritis suatu gelombang datar struktur plat;  $V_p = \{E/\rho(1-v^2)\}^{0,5}$  atau sama dgn 1510 m/s. *DA Sumarsono [6], [7]*. Gambar 9 memperlihatkan simulasi evolusi gelombang sejumlah titik-titik bertekanan sama (isobar) yang terdispersi sebagai fungsi waktu dan panjang pipa.

## 6. Kesimpulan dan Diskusi

- Perhitungan numerik beda hingga cukup layak untuk digunakan menganalisis evolusi perambatan gelombang serta dapat memberikan hasil evaluasi secara lebih baik atas beberapa fenomena yang sering dijumpai dalam suatu sistem pemipaan akibat pembebanan impulsif.
- Analisis konvensional dalam masalah *waterhammer* lebih sering menggunakan asumsi bahwa dinding pipa dianggap tipis dan berlaku seperti layaknya sebuah membran. Sebaliknya dalam analisis ini lebih menekankan komportemen lenturan sebuah cangkang tipis (*Thin-Shell Flexion Theory*) serta menggunakan analisis bidimensional untuk gerakan fluidanya.
- Kondisi nyata sifat fluida mempunyai gaya friksi yang seharusnya timbul jika terjadi pergerakan relatif pada daerah antar batas (*interface*) serta kondisi lingkungan dimana fluida berada sangat mudah mempengaruhi karakteristik dinamika yang dalam perhirungan ini perlu diklarifikasi melalui suatu eksperimentasi.

## Referensi

- [1] Chohan R.K., *Waves in elastic fluid-filled tubes*, Int. Journal Pressure Vess & Piping 1989, no.36, p.185-197.
- [2] Chonan S., *Response of a fluid-filled cylindrical shell to a moving load*, Journal of Sound and Vibration 1977, v.55, no.3, p.419-430.
- [3] Herrmann G., Mirsky I., *Three-dimensional and shell-theory analysis of axially symmetric motions of cylinders*, Journal of ASME, 1956, v.78, p.563-568.
- [4] Renard J., *Respon d'un confinement circulaire mince a un onde de pression*, These Doctorat d'Etat, Universite d'Orleans 1986, 157 p.
- [5] DA Sumarsono, Renard J., *Onde de pression dans un liquide confine par un tube souple*, Mecanique materiaux electricite, Revue du GAMI, Oct – Nov. 1992, no.446, p.26-29.
- [6] DA Sumarsono, Yanuar, *Kecepatan Rambat Gelombang Longitudinal Dalam Pipa Elastis*, Prosiding Seminar QIR Fakultas Teknik Universitas Indonesia, 1999. Depok.
- [7] DA Sumarsono, Tresna P.S., *Evolusi Respon Dinamika Struktur Dinding Pipa Elastis Akibat Beban Impuls. Suatu Analisa Teori Lenturan Cangkang Tipis Menurut Reissner*, Seminar Nasional FTUI, Kampus UI-Depok Agustus 1998.