

## Pemetaan Kestabilan Turbin Gas Horizontal Dengan Pendekatan Rotor Multi Disk

Jhon Malta

<sup>1</sup>Staf Pengajar, Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Andalas,  
Kampus Limau Manis Padang, 25163, Indonesia

Corresponding Author, E-mail: [jhonmalta@ft.unand.ac.id](mailto:jhonmalta@ft.unand.ac.id)

### Abstrak

Pada penelitian ini dikembangkan model turbin gas horizontal dengan pendekatan rotor multi disk. Dengan berdasar pada operasi kerja turbin gas yang mengalami percepatan perputaran rotor pada putaran awal dan selanjutnya perputaran dengan kecepatan konstan maka pemodelan rotor dan persamaan matematik yang diturunkan juga mengakomodir rotor yang berputar dengan kecepatan konstan maupun dengan percepatan konstan. Meskipun demikian, untuk keperluan analisis kestabilan putaran turbin maka persamaan matematik yang diperlukan adalah persamaan linier homogen sistem yang disusun dalam bentuk *State-Space*. Investigasi kestabilan dapat ditentukan secara langsung melalui analisis *eigenvalue* pada kecepatan putaran tertentu. *Eigenvalue* dapat bernilai kompleks konjugat atau hanya bernilai bilangan riil dan ini menunjukkan karakteristik getaran sistem. Bagian imajiner merujuk pada frekuensi pribadi and bagian riil menentukan kestabilan dari getaran sistem. Amplitudo getaran rotor yang timbul akan semakin mengecil terhadap waktu jika bagian riil bernilai negatif and akan semakin besar jika bagian riil bernilai positif. Ketidakstabilan terjadi jika minimal ada satu bagian riil yang bernilai positif.

Persamaan matematik pemodelan diturunkan berdasarkan Metode *Strain Energy* untuk kasus rotor yang ditumpu sederhana pada kedua ujungnya maupun kasus rotor dengan sistem tumpuan statis tak tentu (e.g. tumpuan lebih dari dua). Prosedur awal untuk penurunan persamaan matematik pemodelan adalah penentuan besar gaya-gaya reaksi tumpuan dan selanjutnya penentuan distribusi momen lentur sepanjang poros rotor dengan pembebanan pada setiap nodal (i.e. sambungan antar elemen poros). Semakin banyak elemen pada poros maka semakin besar matriks kekakuan yang terbentuk pada persamaan differensial gerak rotor.

Dengan penggunaan pendekatan multi disk pada rotor maka massa poros dapat diperhitungkan dengan mengasumsikannya menjadi disk-disk kecil yang ditempatkan pada nodal. Gambaran kestabilan putaran turbin dipetakan dalam bentuk *Campbell diagram*. Peta kestabilan dari rotor turbin merupakan suatu hal yang sangat penting karena dapat menjadi acuan dalam pengoperasian rotor. Dengan diketahuinya karakteristik dari rotor turbin ini, maka diharapkan kesalahan para inspektor di lapangan dalam mengidentifikasi kecepatan putaran kritis dari sistem rotor turbin dapat diminimalisir, sehingga diharapkan dapat mencegah terjadinya akibat yang lebih fatal (e.g. kerusakan bearing, poros patah).

**Keywords:** rotor turbin, kestabilan, metode *Strain Energy*, *Campbell diagram*

### 1. Pendahuluan

Dalam dunia industri, penggunaan rotor dalam pemesinan meningkat dengan pesat. Untuk meningkatkan hasil produksi diperlukan mesin-mesin dengan rotor yang dapat bekerja secara kontinu dan dengan kecepatan yang tinggi. Sejalan dengan kebutuhan mesin yang dapat berputar dengan kecepatan yang semakin tinggi, diperlukan pula pengetahuan identifikasi dari sistem yang semakin detail.

Permasalahan utama dalam analisis suatu mesin berputar adalah terlalu banyaknya asumsi yang digunakan sehingga pemodelan yang dibuat masih jauh dari kondisi mesin yang sesungguhnya.

Pemodelan rotor yang paling sederhana adalah Laval rotor, di mana rotor dimodelkan dengan disk tunggal dan massa poros diabaikan. Model rotor seperti ini sudah banyak diteliti dan dianalisis oleh para peneliti [1]-[5].

Untuk kasus rotor yang sederhana, mungkin pendekatan model Laval rotor masih dapat digunakan. Meskipun demikian untuk kasus rotor aktual yang lebih rumit, sebagai contoh adalah kasus rotor dengan disk yang banyak (i.e. pemodelan turbin gas horizontal dengan banyak sudu yang bertingkat), pemodelan Laval rotor tidak lagi dapat digunakan. Untuk kasus rotor yang lebih rumit dapat dimodelkan secara diskrit dengan penggunaan jumlah elemen yang minimal. Salah satu keuntungan penggunaan

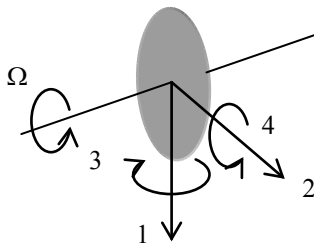
elemen diskrit minimal adalah waktu komputasi yang relatif cepat jika dibandingkan dengan penggunaan metode pendekatan elemen hingga [6].

Untuk kasus rotor dengan luas penampang yang berbeda, pemodelannya menjadi lebih rumit dan pendekatan model Laval rotor tidak lagi dapat digunakan. Pada model ini, poros rotor didiskritisasi menjadi beberapa elemen dengan luas penampang yang berbeda. Selanjutnya, persamaan differensial gerak dan ketidakstabilan getaran rotor telah berhasil diturunkan dan dipetakan [7].

Selanjutnya, pada penelitian yang dilakukan di sini sebuah model turbin gas horizontal dikembangkan dengan pendekatan rotor multi disk. Dengan penggunaan pendekatan multi disk pada rotor maka massa poros dapat diperhitungkan dengan mengasumsikannya menjadi disk-disk kecil yang ditempatkan pada nodal. Gambaran kestabilan putaran turbin dipetakan dalam bentuk Campbell diagram.

**2. Pemodelan Sistem Rotor**

Pemodelan matematik untuk sistem rotor dengan multi disk dapat dikembangkan berdasarkan sistem rotor disk tunggal. Dengan pendekatan asumsi bahwa sebuah disk pada rotor memiliki empat derajat kebebasan, yaitu derajat kebebasan untuk masing-masing arah vertikal dan horizontal dan arah puntiran vertikal dan puntiran horizontal.



**Gambar 1** Derajat kebebasan disk tunggal dengan kecepatan putaran poros  $\Omega$

Secara umum, persamaan differensial gerak sistem rotor dapat diturunkan pada sistem koordinat frame tetap atau pada sistem koordinat frame berputar. Pada sistem koordinat frame tetap, persamaan differensial sistem khususnya matriks kekakuan berupa fungsi waktu (*time variant*). Sedangkan pada sistem koordinat frame berputar, matriks kekakuan berupa fungsi kecepatan putaran poros  $\Omega$  (*speed dependent*).

Selanjutnya pada sistem rotor dengan disk tunggal, berdasarkan referensi [8], di mana jika sistem rotor dianalisis pada sistem koordinat frame berputar, persamaan differensial sistem rotor dapat

disusun sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & \left[ [M_T] + [M_G] \right] \{\ddot{q}_w\} + \left[ [D_T] + [D_G] + [D_a] + [D_i] \right] \{\dot{q}_w\} \\
 & + \left[ [K_T] + [K_G] + [K_a] + [K_w] \right] \{q_w\} \\
 & = \left\{ \{p_T\} + \{p_a\} + \{p_g\} \right\}
 \end{aligned} \tag{1}$$

atau dalam bentuk sederhana dapat ditulis

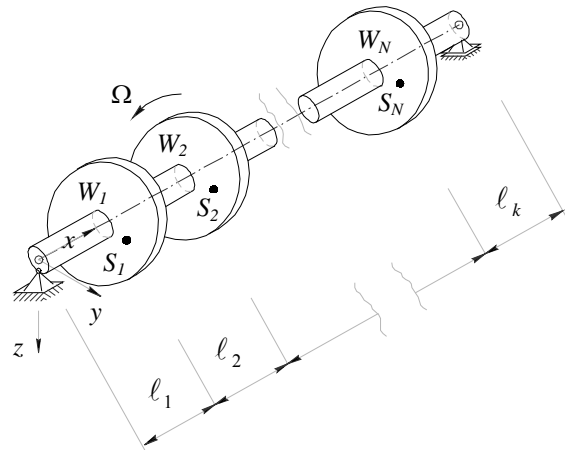
$$[M] \{\ddot{q}_w\} + [D] \{\dot{q}_w\} + [K] \{q_w\} = \{p\}. \tag{2}$$

Catatan: untuk keterangan simbol dapat dilihat pada Nomenklatur, sedangkan cara penurunan persamaan yang lebih lengkap hingga diperolehnya Pers. (1) dapat dilihat pada referensi [6].

Untuk kasus rotor dengan multi disk pemodelannya dapat dilihat pada Gambar 1. Untuk penyusunan persamaan differensial gerak sistem rotor, matriks-matriks:  $[M_T]$ ,  $[M_G]$ ,  $[D_T]$ ,  $[D_G]$ ,  $[D_a]$ ,  $[K_T]$ ,  $[K_G]$ , dan  $[K_a]$  yang berukuran matriks 4x4 untuk rotor disk tunggal pada Pers. (1) dapat disusun pada diagonal matriks sistem rotor secara konservatif. Sebagai contoh jika  $[M_I] = [M_{TI}] + [M_{GI}]$ , maka

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_1] & & & \\ & [M_2] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [M_N] \end{bmatrix} \tag{3}$$

dengan ukuran matriks 4Nx4N, di mana N adalah jumlah disk pada poros. Dengan cara yang sama, matriks-matriks yang lain dapat disusun untuk sistem rotor dengan multi disk.



**Gambar 2** Model rotor dengan multi disk

Selanjutnya matriks kekakuan poros  $[K_w]$  dapat disusun misalnya dengan metode *Strain-Energy*. Prosedur awalnya adalah penentuan besar gaya-gaya reaksi tumpuan dan kemudian penentuan distribusi momen lentur sepanjang poros rotor dengan pembebanan sebesar satu satuan pada setiap nodal (i.e. sambungan antar elemen poros). Semakin banyak elemen pada poros maka semakin besar matriks kekakuan yang terbentuk pada persamaan

differential gerak rotor. Ukuran matriks kekakuan yang diperoleh adalah  $4N \times 4N$ .

Selanjutnya matriks redaman dalam poros  $[D_i]$  dihitung berdasarkan besaran proporsional dari matriks massa dan matriks kekakuan poros,

$$[D_i] = \alpha_M [M] + \alpha_K [K], \quad (3)$$

di mana  $\alpha_M$  dan  $\alpha_K$  adalah koefisien redaman dalam proporsional terhadap matriks massa dan matriks kekakuan.

**2.1 Analisis Kestabilan**

Untuk analisis kestabilan diperlukan persamaan differential homogen, di mana bagian kanan pada Pers. (1) atau Pers. (2) sama dengan nol, kemudian dihitung *eigenvalue*-nya. Salah satu cara penghitungannya adalah dengan penyusunan ulang Pers. (2) dalam bentuk *state-space*, di mana

$$\begin{bmatrix} [D] & [K] \\ [K] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

atau dalam bentuk sederhana ditulis

$$[A]\{r\} - [B]\{\dot{r}\} = \{0\}. \quad (5)$$

*Eigenvalue* dapat bernilai kompleks konjugat atau hanya bernilai bilangan riil dan ini menunjukkan karakteristik getaran sistem. Bagian imajiner merujuk pada frekuensi pribadi and bagian riil menentukan kestabilan dari getaran sistem. Amplitudo getaran rotor yang timbul akan semakin mengecil terhadap waktu jika bagian riil bernilai negatif dan akan semakin besar jika bagian riil bernilai positif. Ketidakstabilan terjadi jika minimal ada satu bagian riil yang bernilai positif.

**3. Simulasi dan Diskusi**

Simulasi yang dilakukan pada penelitian di sini ada dua jenis model rotor dengan multi disk (2 disk). Pada model-1 (Gambar 3) massa poros diabaikan, tapi untuk penghitungan kekakuan poros, data jari-jari poros  $r$  dan modulus elastisitas materialnya  $E$  tetap diperlukan. Sedangkan massa disk pertama adalah sebesar  $m_1$  dengan ketebalan disk  $H_1$  dan massa disk ke dua sebesar  $m_2$  dengan ketebalan disk  $H_2$ . Momen inersia massa polar  $\Theta_p$  dan momen inersia massa aksial  $\Theta_a$  dihitung sebagai:

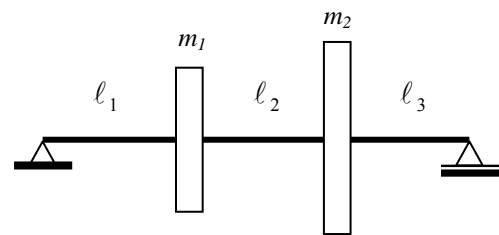
$$\Theta_p = \frac{1}{2} m R^2, \text{ dengan } R \text{ adalah jari-jari disk,}$$

dan

$$\Theta_a = \frac{m}{12} (3R^2 + H^2).$$

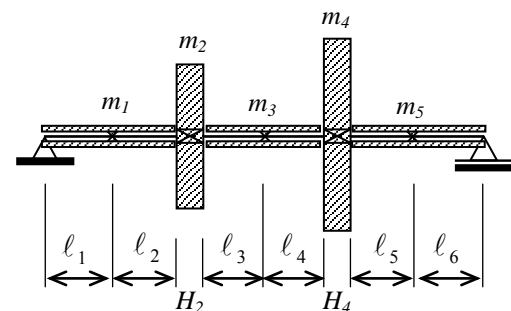
**Data model-1**

- $\rho$  (baja) = 7850 kg/m<sup>3</sup>
- $E$  (baja) = 210 GPa
- $m_1$  = 40 kg
- $m_2$  = 60 kg
- $H_1$  = 100 mm
- $H_2$  = 100 mm
- $l_1$  = 600 mm
- $l_2$  = 600 mm
- $l_3$  = 600 mm
- $r_1$  = 40 mm
- $r_2$  = 40 mm
- $r_3$  = 40 mm



**Gambar 3 Rotor model-1**

Mirip dengan model-1, pada model-2 (lihat Gambar 4), massa poros diasumsikan sebagai massa disk dengan jari-jari  $r$  dan ketebalan disk  $H$  sama dengan panjang elemen poros di kiri dan kanan nodalnya dikurang dengan setengah ketebalan disk yang ada di sisi kiri dan atau di sisi kanan. Pusat massa porosnya diasumsikan hanya bertumpu pada nodal. Dengan pendekatan jumlah elemen diskrit minimal, maka jumlah elemen diskrit adalah 6 elemen.



**Gambar 4 Rotor model-2**

**Data model-2**

- $\rho$  (baja) = 7850 kg/m<sup>3</sup>
- $E$  (baja) = 210 GPa
- $m_1$  = Ditentukan berdasarkan massa elemen-1
- $m_2$  = 40 kg
- $m_3$  = Ditentukan berdasarkan massa elemen-3

- $m_4 = 60 \text{ kg}$
- $m_5 =$  Ditentukan berdasarkan massa elemen-5
- $H_1 = 550 \text{ mm}$
- $H_2 = 100 \text{ mm}$
- $H_3 = 500 \text{ mm}$
- $H_4 = 100 \text{ mm}$
- $H_5 = 550 \text{ mm}$
- $l_1 = 300 \text{ mm}$
- $l_2 = 300 \text{ mm}$
- $l_3 = 300 \text{ mm}$
- $l_4 = 300 \text{ mm}$
- $l_5 = 300 \text{ mm}$
- $r_1 = 40 \text{ mm}$
- $r_2 = 40 \text{ mm}$
- $r_3 = 40 \text{ mm}$
- $r_4 = 40 \text{ mm}$
- $r_5 = 40 \text{ mm}$
- $r_6 = 40 \text{ mm}$

Secara umum perbandingan kondisi rotor antara model-1 dan model-2 dapat dilihat pada Tabel 1.

**Tabel 1** Perbandingan kondisi rotor model-1 dengan model-2

	Model-1	Model-2
Massa rotor diperhitungkan	tidak	Ya
Jumlah disk	2	5
Jumlah elemen diskrit	3	6
Jumlah DoF	8	20
Pendekatan jumlah elemen minimal	ya	ya

Pada masing-masing model rotor dilakukan analisis kestabilan dengan penghitungan *eigenvalue* sistem rotor yang sudah disusun dalam bentuk *state-space*. Hasil *eigenvalue* diperoleh dalam bentuk kompleks konjugat. Bagian riil menentukan kestabilan rotor. Jika ada minimal satu saja bagian riil yang bernilai positif maka pada kecepatan putaran tersebut rotor tidak stabil. Selanjutnya bagian imajiner menunjukkan frekuensi pribadi sistem rotor. Perbandingan frekuensi pribadi pada sistem rotor model-1 dan model-2 ditampilkan pada Tabel 2.

Dari Tabel 2 tersebut terlihat bahwa frekuensi pribadi pada model-2 lebih rendah dari frekuensi pribadi pada model-1. Hal ini disebabkan massa model-2 lebih besar dari model-1 sebagai akibat dari dimasukkannya massa poros dalam perhitungan. Pada model-2 jumlah frekuensi pribadinya seharusnya adalah 20 sesuai dengan jumlah derajat kebebasannya,

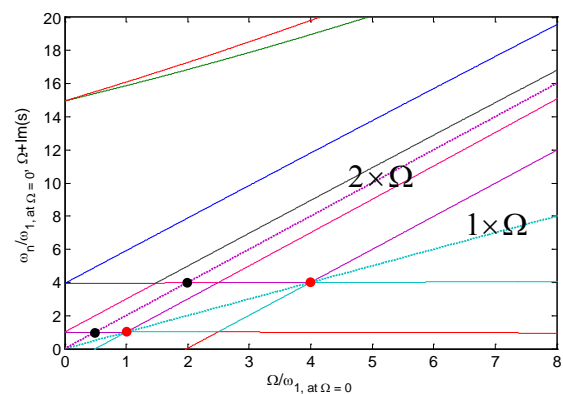
tetapi yang ditampilkan hanya 8 frekuensi pribadi terendah saja. Dari tabel tersebut juga terlihat nilai frekuensi pribadi yang ganda. Hal ini dikarenakan poros rotor yang bulat sehingga kekakuan dalam arah horizontal maupun arah vertikal sama.

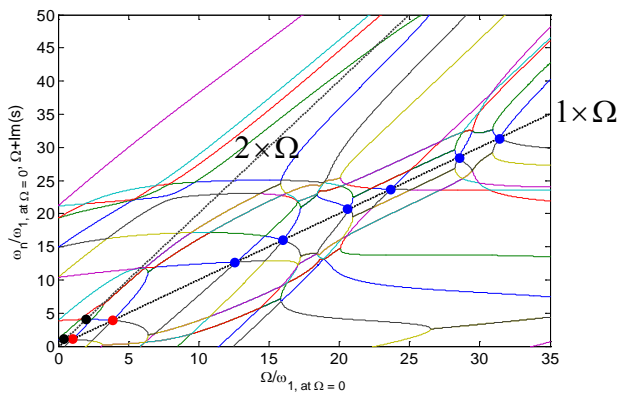
**Tabel 2** Perbandingan frekuensi pribadi model-1 dengan model-2

f n	Model-1		Model-2	
	$\omega_n$ [rad/s]	$\omega_n/\omega_1$	$\omega_n$ [rad/s]	$\omega_n/\omega_1$
1	215.6	1.00	180.0	1.00
2	215.6	1.00	180.0	1.00
3	848.7	3.94	692.2	3.85
4	848.7	3.94	692.2	3.85
5	3224.4	14.95	1866.8	10.37
6	3224.4	14.95	1866.8	10.37
7	5208.0	24.15	2677.5	14.87
8	5208.0	24.15	2677.5	14.87

Selanjutnya pada diagram Campbell pada Gambar 5 dan 6 ditampilkan frekuensi pribadi yang bernilai positif saja dan merupakan rasio terhadap frekuensi pribadi terendah pada saat rotor kondisi diam. Dari Gambar 5 terlihat bahwa titik warna merah merupakan frekuensi pribadi pertama dan ketiga dengan besaran rasio bernilai 1.00 dan 3.94 sesuai dengan Tabel 2. Hal yang sama juga terjadi pada Gambar 6, di mana frekuensi pribadi pertama dan ketiga dengan besaran rasio bernilai 1.00 dan 3.85 dan juga sesuai dengan Tabel 2. Pada kecepatan putaran rotor dengan nilai tersebut, rotor akan bergetar dengan amplitudo yang relatif besar, khususnya untuk rotor yang memiliki massa tak seimbang (i.e. penyebab getaran harmonik pada  $1 \times \Omega$ ).

Selanjutnya pada Gambar 5 dan 6 dengan titik hitam yang berada pada kecepatan putaran rotor setengah dari yang bertanda warna merah, pada kecepatan putaran tersebut akan terjadi getaran dengan amplitudo yang relatif agak besar (catatan: tidak sebesar getaran pada tanda titik merah). Amplitudo getaran ini akan muncul jika poros rotor bersifat anisotropi atau adanya *misalignment* poros (i.e. salah satu penyebab getaran harmonik  $2 \times \Omega$ ).



**Gambar 5** Diagram Campbell rotor model-1**Gambar 6** Diagram Campbell rotor model-2

Hal yang di luar dugaan sebelumnya adalah pada titik yang ditandai dengan warna biru pada Gambar 6. Seharusnya pada titik-titik biru tersebut juga menunjukkan kecepatan putaran rotor yang sama dengan frekuensi pribadinya, tetapi ternyata tidak demikian. Kecepatan putaran rotor  $1 \times \Omega$  yang berimpit dengan frekuensi pribadi hanya terjadi pada empat frekuensi pribadi terendah saja. Hal ini menjadi perhatian lebih lanjut, di mana kemungkinan terjadi hanya pada kedua pasangan konjugat eigenvalue yang berpotongan dengan garis  $1 \times \Omega$  putaran rotor.

#### 4. Kesimpulan

Pada penelitian analisis kestabilan rotor multi disk yang dilakukan di sini terlihat bahwa pengembangan persamaan differensial sistem rotor telah berhasil diturunkan. Dari simulasi getaran yang telah dilakukan pada dua model rotor dapat disimpulkan bahwa:

- Penambahan massa poros dalam perhitungan memberikan hasil frekuensi pribadi yang lebih rendah jika dibandingkan dengan sistem rotor tanpa massa poros.
- Getaran dengan amplitudo yang relatif besar terjadi jika kedua pasangan konjugat dari *eigenvalue* berpotongan dengan garis  $1 \times \Omega$  putaran rotor dan terjadi hanya pada empat frekuensi pribadi terendah saja.
- Diperlukan studi lebih lanjut untuk mengetahui apakah amplitudo yang relatif besar juga terjadi pada kedua pasangan konjugat dari *eigenvalue* yang berpotongan dengan garis  $1 \times \Omega$  putaran rotor pada frekuensi pribadi ke-5 dan seterusnya dan kenapa titik perpotongannya tidak sama dengan frekuensi pribadi sistem rotor dalam kondisi diam.

#### 5. Ucapan Terima Kasih

Pada makalah ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Fakultas Teknik Universitas Andalas yang telah membiayai penelitian ini dengan anggaran DIPA Fakultas Teknik tahun 2012.

#### 6. Nomenklatur

##### Greek

$\alpha_M$	Koefisien redaman dalam proporsional terhadap matriks massa
$\alpha_K$	Koefisien redaman dalam proporsional terhadap matriks kekakuan
$\rho$	Massa jenis material
$\Theta_a$	Momen inersia massa aksial
$\Theta_p$	Momen inersia massa polar
$\omega_n$	Frekuensi pribadi sistem rotor pada kondisi diam

##### Matriks

$[D_a]$	Matriks redaman luar pada massa
$[D_G]$	Matriks redaman dari momen giroskopis
$[D_i]$	Matriks redaman dalam proporsional
$[D_T]$	Matriks redaman dari inersia massa arah translasi
$[K_a]$	Matriks kekakuan dari redaman luar proporsional
$[K_G]$	Matriks redaman dari momen giroskopis
$[K_T]$	Matriks redaman dari inersia massa arah translasi
$[K_w]$	Matriks kekakuan poros
$[M_G]$	Matriks massa rotasi dari momen giroskopis
$[M_T]$	Matriks massa arah translasi
$\{p_a\}$	Matriks gangguan dari redaman luar proporsional
$\{p_g\}$	Matriks gangguan akibat gaya gravitasi
$\{p_T\}$	Matriks gangguan dari inersia massa arah translasi
$\{q_w\}$	Matriks perpindahan (DoF disk)
$\{\dot{q}_w\}$	Matriks kecepatan (DoF disk)
$\{\ddot{q}_w\}$	Matriks percepatan (DoF disk)

#### 7. Referensi

1. Kellenberger (1958), *Biegeschwingungen einer unrunder, rotierenden Welle in horizontaler Lage*, Ingenieur-Archiv 26, 1958, pp. 302-318.
2. Hull, E.H., *Shaft Whirling as Influenced by Stiffness Asymmetry*, ASME Journal of

- Engineering for Industry 83 (1961), pp. 219-226.
3. Ariaratnam, S. T. (1965), The Vibration of Unsymmetrical Rotating Shafts, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, Mar. 1965, pp. 157-162.
  4. Michatz, J. (1970), *Das Biegeverhalten einer einfach besetzten, unrunder rotierenden Welle unter Berücksichtigung äußerer und innerer Dämpfungseinflüsse*, Dissertation an der TU Berlin.
  5. Malta, J. (2008), *On the dynamics of flexible anisotropic rotor*, Proc. of ISSM, TU Delft, the Netherlands, pp. 243-247.
  6. Malta, J. (2009), *Investigation of Anisotropic Rotor with Different Shaft Orientation*, Dissertation in the TU Darmstadt, Germany.
  7. Yamamoto, T., Ota, H., Kono, K. (1968), *On the Unstable Vibrations of a Shaft with Unsymmetrical Stiffness Carrying an Unsymmetrical rotor*, Journal of Applied Mechanics, 35 (1968), pp. 313-321.
  8. Malta, J., *Accelerated Anisotropic Rotor Through Its Critical Speeds*, Prosiding Seminar Nasional Tahunan Teknik Mesin (SNTTM ke-9) Palembang, 13-15 Oktober 2010, p. MIII-15-21.