

Perbandingan Berbagai Model Turbulen Dengan Menggunakan Simulasi CFD Aliran Fluida Pada Nosel Supersonik

Ahmad Indra Siswantara^{1*}, Budiarmo¹, Asyari Daryus^{1,2}, dan Gun Gun R. Gunadi^{1,3}

¹Departemen Teknik Mesin, Universitas Indonesia, Depok, Jawa Barat, Indonesia 16424

²Jurusan Teknik Mesin, Universitas Darma Persada

Jl. Radin Inten II (Terusan Casablanca) Pondok Kelapa, Jakarta Timur 13450, Indonesia

³Jurusan Teknik Mesin, Politeknik Negeri Jakarta, Depok, Jawa Barat, Indonesia

*a_indra@eng.ui.ac.id

Abstrak

Makalah ini menyajikan analisis CFD untuk aliran fluida pada nosel supersonik atau nosel konvergen-divergen dengan menggunakan tiga model turbulen yaitu model turbulen standar (STD) $k-\epsilon$, RNG $k-\epsilon$, dan *Reynolds Stress Model* (RSM). Tujuan dari simulasi ini adalah untuk mengetahui karakteristik berbagai model turbulen pada hasil simulasi aliran fluida, khususnya aliran fluida pada nosel supersonik. Simulasi CFD dilakukan dengan perangkat lunak CFDSOF(r) menggunakan model geometri dua dimensi. Fluida kerja diasumsikan adalah udara panas yang keluar dari turbin gas mikro dengan tekanan 1,57 bar absolut dan temperatur 971 K. Dari simulasi dengan tiga model tersebut diperoleh kecepatan pada *throat* adalah kecepatan suara dan terus meningkat ke kecepatan supersonik ke sisi divergen dan mencapai Mach 3 pada sisi keluar nosel. Dari hasil simulasi, ketiga model turbulen tersebut ternyata memberikan hasil yang hampir sama untuk tekanan, kecepatan dan temperatur, namun memberikan hasil yang berbeda untuk nilai energi kinetik turbulen, dimana dalam hal ini model turbulen RSM dianggap lebih baik.

Kata kunci : CFD, Model Turbulen, Nosel Supersonik, STD $k-\epsilon$, RNG $k-\epsilon$, RSM

Pendahuluan

Nosel adalah sebuah alat sederhana, biasanya berbentuk pipa, yang berfungsi menyalurkan dan menaikkan kecepatan udara atau gas. Pada nosel, gas yang masuk dengan kecepatan rendah, tekanan tinggi dan temperatur tinggi akan dirubah menjadi gas dengan kecepatan tinggi, tekanan rendah dan temperatur rendah [1, 2].

Nosel banyak digunakan di berbagai aplikasi dan umumnya berfungsi untuk mengakselerasi gas panas untuk mendapatkan daya dorong seperti roket, *ramjet*. Berdasarkan konfigurasinya, secara umum nosel dapat dibagi atas 3 [3]:

1. Nosel kerucut, bisa berbentuk sisi kerucut atau linier;
2. Nosel bel, bisa berbentuk kontur, atau *converging-diverging* klasik;
3. Nosel annular, bisa berbentuk *spike*, *aerospike*, *plug*, *expansion* dan *expansion-deflection*.

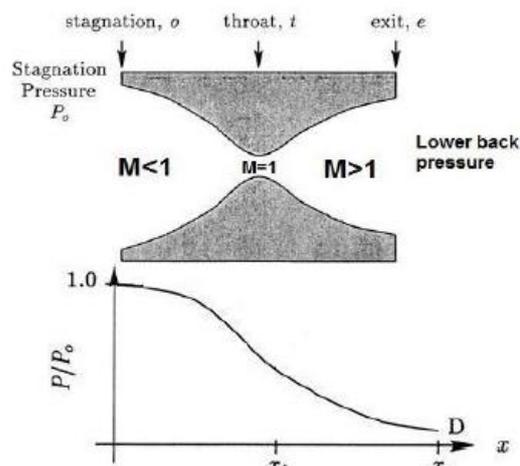
Nosel *converging-diverging* atau nosel supersonik adalah salah satu jenis nosel yang tujuannya adalah untuk mendapatkan kecepatan supersonik pada saat gas keluar dari nosel. Nosel ini dikenal juga dengan *de Laval nozzle*. Pada nosel supersonik, gas panas masuk ke bagian konvergen dari nosel dan kecepatan gas akan bertambah dan mencapai kecepatan suara (Mach=1) ketika mencapai *throat*. Gas akan terus bertambah kecepataannya ketika meninggalkan *throat* yang akan melebihi kecepatan suara atau supersonik (Gambar 1). Ketika kecepatan gas bertambah maka tekanan statik gas akan turun.

Nosel supersonik banyak dipakai di berbagai sistem seperti roket, *supersonic wind tunnel*, *nozzle ejector* pada siklus refrigerasi, sistem turbin mikro dan berbagai aplikasi lainnya [1-7]. Belega dkk. [1] melakukan desain dan analisis aliran di dalam nosel supersonik pada roket dengan perangkat lunak CFD, menggunakan model turbulen standar (STD) $k-\epsilon$. Hasil simulasi

tidak berbeda jauh dengan hasil eksperimen. Rao dkk. [4] melakukan analisis aliran pada nosel supersonik yang terdapat pada roket dengan memvariasikan bilangan Mach dan rasio tekanan. Model turbulen yang digunakan adalah model turbulen STD $k-\varepsilon$. Wu dkk. [5] melakukan simulasi pada *tandem nozzle supersonic wind tunnel* untuk mengetahui lebih dalam terhadap perambatan aliran pada terowongan angin supersonik menggunakan model turbulen $k-\omega$. Dari simulasi ini diperoleh hasil bahwa model aliran mempengaruhi resultan medan aliran. Xu dkk. [2] melakukan simulasi aliran supersonik pada nosel supersonik mikro yang dipakai pada sistem turbin mikro. Diperoleh hasil bahwa *shock wave* dapat terjadi di dalam dan di luar nosel mikro. Simulasi dilakukan dengan grid 2 dimensi dan perhitungan dilakukan dengan persamaan Navier-Stokes dua dimensi memakai perangkat lunak FLUENT 6.1. Shariatzadeh dkk. [3] melakukan simulasi dengan menggunakan model turbulen STD $k-\varepsilon$ dan model turbulen $k-\omega$ untuk melihat karakteristik aliran supersonik pada tipikal nosel supersonik dan membandingkannya dengan data eksperimen. Hasil simulasi menunjukkan bahwa secara umum kedua model turbulen memberikan hasil yang tidak jauh berbeda dengan eksperimen, namun kedua model turbulen memberikan hasil yang kurang sesuai dengan data eksperimen pada fenomena *shock wave*.

Simulasi aliran dengan menggunakan model turbulen memberikan kemudahan dimana tidak perlu harus membuat peralatan percobaan yang membutuhkan biaya besar dan waktu yang lama namun cukup melakukan simulasi pada perangkat keras komputer. Fenomena aliran dapat dengan cepat diperoleh sehingga akan menghemat waktu dan biaya. Banyak model turbulen yang dikembangkan, diantaranya adalah model turbulen pada kelompok RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equation). Dari beberapa model turbulen di kelompok RANS tersebut, yang paling populer dan banyak digunakan diantaranya adalah model turbulen standar (STD) $k-\varepsilon$, Renormalization Group (RNG) $k-\varepsilon$, dan Stress Reynolds Model (RSM). Model turbulen STD $k-\varepsilon$ atau disebut juga model turbulen $k-\varepsilon$ adalah model turbulen yang sederhana untuk diimplementasikan dimana hanya membutuhkan masukan kondisi batas, banyak dipakai untuk aplikasi di industri, stabil, dan tervalidasi secara luas [8]. Namun disamping

kelebihan-kelebihan yang dimilikinya, model STD $k-\varepsilon$ juga mempunyai kelemahan seperti hasil yang kurang bagus apabila dipakai untuk simulasi aliran tidak ber dinding, aliran dengan regangan yang sangat besar, aliran rotasi, dan aliran berkembang penuh pada saluran non-sirkular [8].



Gambar 1. Gambar skematik dan diagram kualitatif tekanan terhadap sumbu nosel supersonik [3].

Model turbulen RNG $k-\varepsilon$ adalah peningkatan model turbulen STD $k-\varepsilon$ dimana teori statistik *renormalization group* (RNG) yang dikembangkan oleh Yakhot dan Orszag digunakan pada pemodelan [9]. Pemodelan ini memasukkan beberapa tambahan persamaan pada persamaan STD $k-\varepsilon$ seperti penambahan suku pada persamaan ε , pengaruh *swirl* pada turbulensi, rumus analitik untuk bilangan Prandtl turbulen, dan rumus diferensial untuk viskositas efektif, sehingga akan meningkatkan nilai prediksi bagi beberapa jenis aliran seperti aliran dengan *high streamline curvature* dan laju regangan, aliran transisi, aliran separasi, *wall heat and mass transfer*, dan aliran bergantung waktu dengan gerak olakan besar. Kelemahan dari model ini adalah masih belum dapat memperkirakan semburan pada *round jet* dengan tepat.

Model turbulen RSM adalah model pada kelompok RANS yang paling lengkap yang mempunyai kelebihan yaitu hanya perlu masukan kondisi awal dan/atau kondisi batas saja dan sangat akurat untuk semua tegangan Reynolds mulai dari aliran yang sederhana sampai dengan aliran kompleks [8]. Namun kelemahan model ini adalah biaya kalkulasi yang sangat besar karena pemodelan yang lebih kompleks sehingga butuh

waktu kalkulasi yang lebih lama, tidak tervalidasi secara luas, dan pada beberapa jenis aliran seperti jet asimetrik dan aliran resirkulasi yang tidak mempunyai batas memberikan hasil yang kurang baik [8].

Makalah ini akan membahas perbandingan berbagai model turbulen dalam menganalisis sifat atau karakteristik aliran pada nosel supersonik dengan bantuan simulasi CFD. Model turbulen yang digunakan adalah model turbulen STD $k-\epsilon$, RNG $k-\epsilon$ dan RSM.

Metode

Model Turbulen. Pada simulasi ini digunakan tiga jenis turbulen yaitu model turbulen standar (STD) $k-\epsilon$, Renormalization Group (RNG) $k-\epsilon$, dan Stress Renoldys Model (RSM). Diantara ketiga model ini, model RSM adalah model dengan persamaan yang paling kompleks, sehingga hasil simulasi untuk model RSM menjadi paling teliti, diikuti dengan model RNG $k-\epsilon$ dan model STD $k-\epsilon$.

Model turbulen STD $k-\epsilon$ mempunyai dua persamaan transport tambahan untuk persamaan aliran turbulen yaitu persamaan transpor energi kinetik, k , dan persamaan transpor disipasi, ϵ . Persamaan transpor k diberikan oleh [8]:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k \mathbf{U}) = \text{div} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \text{grad } k \right] + 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - \rho \epsilon \tag{1}$$

dan persamaan transpor ϵ [8]:

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \epsilon \mathbf{U}) = \text{div} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \text{grad } \epsilon \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \tag{2}$$

dimana:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \tag{3}$$

ρ adalah rapat jenis, \mathbf{U} adalah vektor kecepatan, μ_t adalah viskositas eddy, E_{ij} adalah laju rata-rata deformasi, jika i atau $j=1$ maka berkaitan dengan arah- x , i atau $j=2$ berkaitan dengan arah- y dan apabila i atau $j=3$ maka berkaitan dengan arah- z , C_μ , σ_k , σ_ϵ , $C_{1\epsilon}$ dan $C_{2\epsilon}$ adalah konstanta.

Model turbulen RNG $k-\epsilon$ juga mempunyai dua persamaan transpor tambahan, yaitu persamaan transpor energi kinetik, k , dan persamaan transpor disipasi, ϵ . Persamaan transpor k diberikan oleh [10]:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \epsilon \tag{4}$$

Dan persamaan transpor ϵ diberikan oleh [10]:

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \tag{5}$$

dimana:

$$P_k = -\rho u'_i u'_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{6}$$

$$C_{2\epsilon}^* = C_{2\epsilon} + \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta / \eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \tag{7}$$

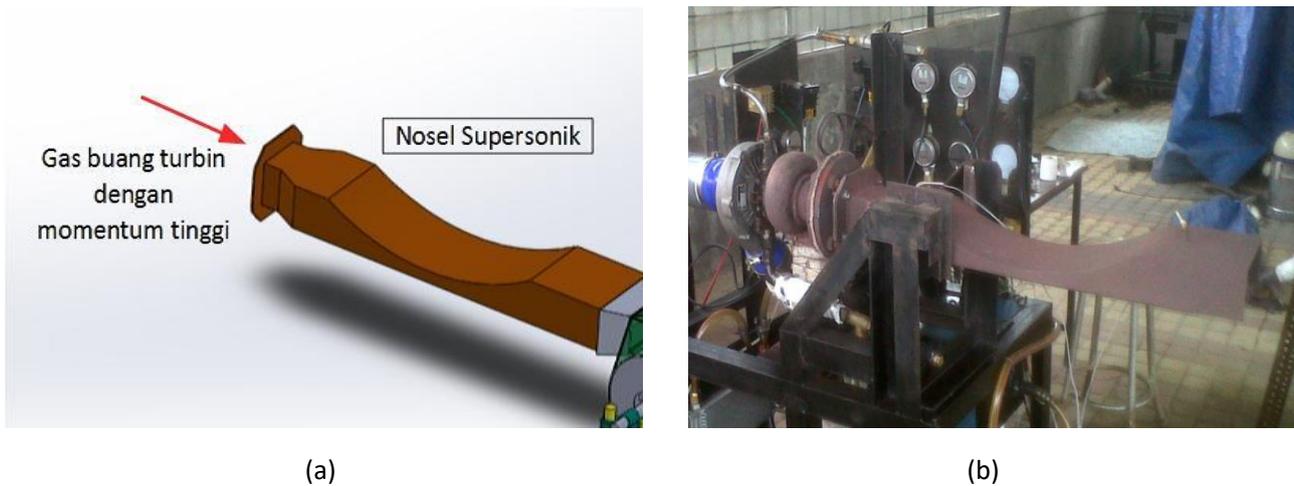
$$\eta = Sk / \epsilon \quad \text{dan} \quad S = (2S_{ij} S_{ij})^{1/2}$$

S adalah laju rata-rata regangan, C_μ , σ_k , σ_ϵ , $C_{1\epsilon}$, $C_{2\epsilon}$, η_0 dan β adalah konstanta.

Model turbulen RSM menggunakan persamaan transpor tegangan Reynolds, R_{ij} , dengan persamaan $R_{ij} = -\tau_{ij} / \rho = \overline{u'_i u'_j}$ yang disebut juga tegangan Reynolds kinematik dimana menghitung tegangan Reynolds individu. Persamaan eksak untuk transpor R_{ij} adalah [8]:

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = P_{ij} + D_{ij} - \epsilon_{ij} + \Pi_{ij} + \Omega_{ij} \tag{8}$$

dimana P_{ij} adalah laju produksi, D_{ij} adalah transpor difusi, ϵ_{ij} adalah laju disipasi, Π_{ij} adalah transpor interaksi tegangan-regangan turbulen, dan Ω_{ij} adalah transpor rotasi.



Gambar 2. Nosel supersonik (a) sketsa (b) konstruksi nosel pada turbin gas mikro.

Geometri. Gambar 2 menunjukkan sketsa dan konstruksi nosel pada turbin gas mikro. Nosel mempunyai penampang berbentuk empat persegi panjang dengan dimensi panjang 730 mm, tinggi 67 mm dan lebar 152 mm dan tinggi pada *throat* adalah 15 mm. Sisi masuk nosel adalah gas dari turbin gas mikro dengan kecepatan rendah atau subsonik dan keluar nosel dengan kecepatan supersonik.

Grid. Model yang digunakan untuk simulasi adalah model 2 dimensi, karena nosel berbentuk simetri ke arah lebar sehingga distribusi sifat-sifat aliran fluida akan seragam pada arah lebar tersebut, maka model 2 dimensi akan memberikan hasil yang tidak akan berbeda jauh dengan model 3 dimensi. Disamping itu perhitungan untuk model 2 dimensi akan lebih sederhana dan mengurangi waktu iterasi.

Grid dibuat dengan perangkat lunak yang sama dengan yang digunakan untuk perhitungan simulasi yaitu CFD-SOF(r). Grid yang digunakan adalah jenis terstruktur dengan jumlah sel 130 x 27. Gambar 3 menunjukkan konstruksi grid dimana pada daerah sepanjang sumbu yang melalui *throat* grid diperhalus yang bertujuan untuk mendapatkan ketelitian hasil simulasi yang lebih baik.

Kebergantungan pada grid telah diuji pada berbagai dimensi grid yaitu pada ukuran sel 130 x 27, 130 x 69, dan 195 x 27 dimana hasil pengujian konsisten, tidak dipengaruhi oleh ukuran grid.

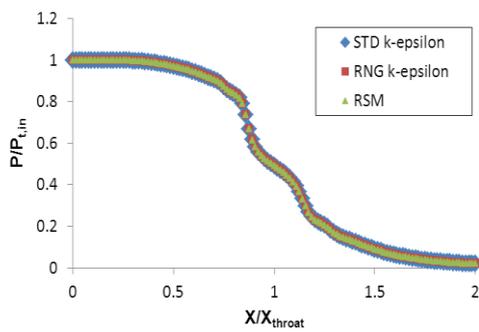
Kondisi Batas. Kondisi batas diambil dari data hasil eksperimen sistem turbin gas mikro “Proto X-3” yang terdapat di laboratorium Mekanika Fluida, Departemen Teknik Mesin, Universitas Indonesia. Tekanan gas masuk nosel adalah 1,57 bar absolut dan temperatur 971 K. Intensitas turbulensi diasumsikan 10%.



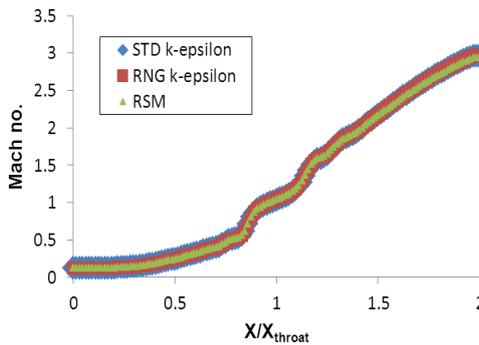
Gambar 3. Geometri nosel dengan grid 2 dimensi.

Hasil dan Pembahasan

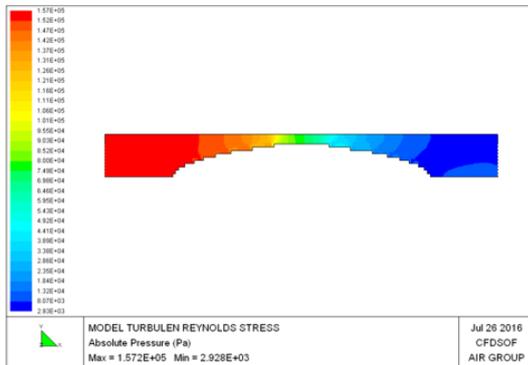
Gambar 4 menunjukkan kurva tekanan versus jarak sisi masuk ke sisi keluar nosel di sumbu atau bagian tengah *throat* untuk ketiga jenis turbulen. Sumbu *throat* dinyatakan dengan rasio antara jarak dari sisi masuk, X (m), dengan jarak ke *throat*, X_{throat} (m), sedangkan tekanan dinyatakan dalam rasio antara tekanan, p , dengan tekanan sisi masuk, $p_{t,in}$ (bar). Ketiga model memberikan hasil yang identik dimana terlihat ketiga kurva berhimpit, menandakan bahwa jenis model turbulen tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap hasil simulasi.



Gambar 4. Kurva tekanan pada sumbu *throat*.

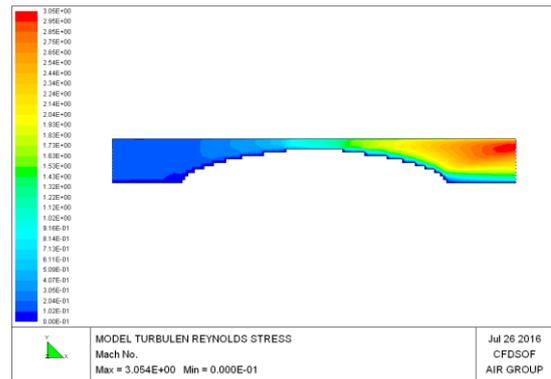


Gambar 5. Kurva kecepatan pada sumbu *throat*.

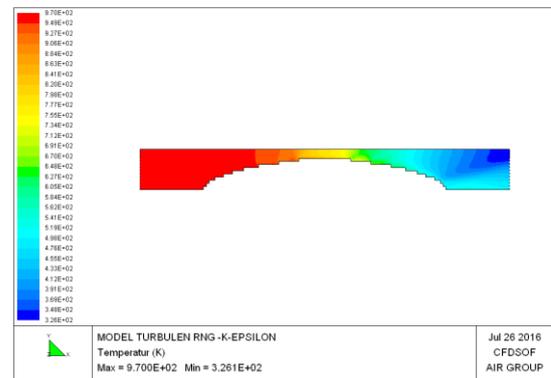


Gambar 6. Kontur tekanan statis

Hal yang sama diperoleh untuk kurva kecepatan seperti yang dapat dilihat pada Gambar 5 dimana ketiga model turbulen memberikan hasil yang identik. Kecepatan pada *throat* berada pada Mach 1 dan terus meningkat sampai sisi keluar nosel dimana kecepatan keluar nosel didapatkan pada angka Mach 3. Sekali lagi bahwa jenis model turbulen tidak memberikan perbedaan yang berarti bagi kurva kecepatan.



Gambar 7. Kontur Mach number.



Gambar 8. Kontur temperatur statis.

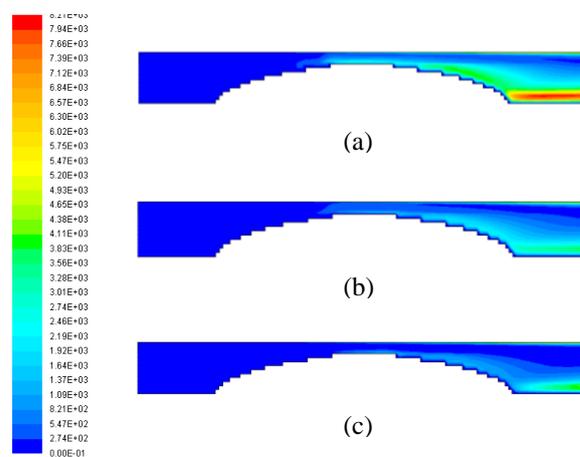
Hasil simulasi untuk kontur tekanan statis, kecepatan dalam bilangan Mach, dan temperatur statis menunjukkan hasil yang juga identik untuk ketiga jenis model turbulen yang melengkapi hasil dari plot kurva tekanan dan kecepatan. Gambar 6 sampai dengan Gambar 8 berturut-turut adalah hasil simulasi untuk kontur tekanan statis, kecepatan dan temperatur statis untuk model turbulen RSM. Dua jenis model turbulen lainnya tidak ditampilkan karena mempunyai bentuk kontur yang identik. Dari kontur tekanan statis pada Gambar 6 terlihat bahwa tekanan maksimum pada sisi masuk nosel (warna merah) dan terus menurun ke sisi keluar nosel (warna biru). Tidak terlihat gejala *shock wave* pada nosel dikarenakan tekanan pada sisi keluar nosel tidak diset pada nilai tertentu sehingga perhitungan oleh aplikasi CFD diteruskan sampai tekanan minimum yang dimungkinkan supaya kecepatan di sisi keluar nosel tetap dalam keadaan kecepatan supersonik. Hal ini juga ditunjukkan oleh kontur kecepatan pada Gambar 7, dimana kecepatan tetap naik dari kecepatan subsonik di sisi masuk menjadi

kecepatan supersonik di sisi keluar, tidak terlihat gejala *shock wave* yang terjadi.

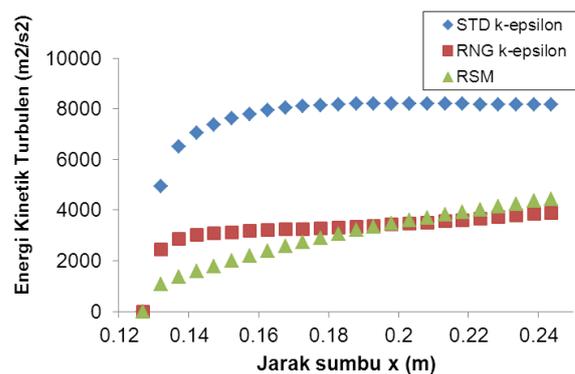
Dari kontur temperatur (Gambar 8) terlihat bahwa temperatur gas turun menuju arah sisi keluar nosel dimana warna merah menunjukkan temperatur tinggi dan warna biru menunjukkan temperatur yang lebih rendah. Penurunan temperatur dari 900 K di sisi masuk ke 326 K di sisi keluar terjadi karena energi panas gas diambil untuk meningkatkan energi kinetiknya menjadikan kecepatannya meningkat. Gambar 9 menunjukkan kontur energi kinetik turbulen. Tidak seperti kontur tekanan, kecepatan dan temperatur dimana ketiga jenis model turbulen menunjukkan hasil yang identik, pada kontur energi kinetik turbulen ketiga jenis model turbulen memperlihatkan hasil yang berbeda. Perbedaan terlihat mulai dari *throat* menuju sisi keluar nosel, terutama di daerah bagian bawah. Nilai tertinggi diberikan oleh model turbulen STD $k-\epsilon$ yaitu sebesar $8212 \text{ m}^2/\text{s}^2$, terendah oleh model turbulen RSM sebesar $5970 \text{ m}^2/\text{s}^2$ sementara model RNG $k-\epsilon$ mempunyai nilai sebesar $6043 \text{ m}^2/\text{s}^2$.

Gambar 10 menunjukkan kurva energi kinetik turbulen pada jarak 15 mm dari bawah nosel di daerah dekat sisi keluar. Kurva untuk model STD $k-\epsilon$ berada di posisi paling atas dan cenderung konstan di angka 8000an. Kecenderungan kurva yang sama dipunyai oleh model turbulen RNG $k-\epsilon$ namun nilainya berada di bawah nilai model turbulen STD $k-\epsilon$. Sedangkan kecenderungan kurva untuk model turbulen RSM cenderung linier dan naik ke arah sisi keluar nosel. Sebagaimana diketahui bahwa model turbulen RSM adalah model yang memberikan hasil lebih akurat untuk aplikasi sederhana sampai kompleks apabila dibandingkan dengan model turbulen dua persamaan seperti model turbulen STD $k-\epsilon$ atau RNG $k-\epsilon$, sementara itu model turbulen STD $k-\epsilon$ lebih unggul karena keserhanaannya, murah dan cukup memadai hasilnya untuk banyak aplikasi walaupun hasilnya tidak terlalu presisi dan tidak terlalu baik untuk aliran yang mempunyai regangan Reynolds besar. Sedangkan model turbulen RNG $k-\epsilon$ merupakan peningkatan dari model standar $k-\epsilon$ termasuk di sisi regangan Reynolds. Model turbulen RSM kemungkinan besar akan

memberikan hasil perhitungan untuk energi kinetik turbulen yang lebih baik dari model turbulen RNG $k-\epsilon$ ataupun model turbulen STD $k-\epsilon$ karena model turbulen RSM memperhitungkan tegangan Reynolds ke semua arah, sehingga hasil simulasi model turbulen RSM dianggap adalah yang paling baik, diikuti dengan model turbulen RNG $k-\epsilon$ dan model turbulen STD $k-\epsilon$. Dalam kasus ini model turbulen STD $k-\epsilon$ memberikan hasil yang terlalu besar atau.



Gambar 9. Kontur energi kinetik turbulen. (a) model STD $k-\epsilon$, (b) model RNG $k-\epsilon$, (c) model RSM.



Gambar 10. Kurva energi kinetik turbulen pada jarak 15 mm dari dasar dan didekat sisi keluar.

Kesimpulan

Tidak semua model turbulen sesuai digunakan untuk setiap kasus aliran fluida karena setiap kasus tersebut adalah spesifik dan mungkin membutuhkan model turbulen tertentu untuk dapat menghitung sifat-sifat aliran dengan lebih teliti. Oleh sebab itu makalah ini mencoba untuk membandingkan

karakteristik tiga model turbulen yaitu standar (STD) $k-\varepsilon$, Renormalization Group (RNG) $k-\varepsilon$ dan Reynold Stress Model (RSM) dalam mensimulasikan aliran pada nosel konvergen-divergen atau nosel supersonik. Hasil simulasi yang diperoleh dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Distribusi tekanan statik, kecepatan, dan temperatur statik menunjukkan bahwa ketiga model turbulen memberikan hasil yang identik;
2. Kecepatan gas meningkat dan mencapai Mach 1 pada *throat* dan Mach 3 pada sisi keluar nosel, sementara disisi lain tekanan statik dan temperatur turun;
3. Kontur energi kinetik turbulen ternyata menunjukkan hasil yang tidak sama pada ketiga jenis model turbulen. Model turbulen STD $k-\varepsilon$ memberikan nilai energi kinetik turbulen yang lebih besar sementara model turbulen RSM yang paling rendah. Nilai energi kinetik turbulen maksimum untuk model turbulen STD $k-\varepsilon$ adalah $8212 \text{ m}^2/\text{s}^2$, untuk model RNG $k-\varepsilon$ adalah $6043 \text{ m}^2/\text{s}^2$ dan untuk model RSM adalah $5970 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Dalam hal ini dianggap model turbulen RSM memberikan hasil yang lebih teliti;
4. Dari hasil penelitian, dapat disimpulkan bahwa ketiga model turbulen memberikan hasil yang baik untuk memprediksi distribusi tekanan, kecepatan, dan temperatur pada aliran fluida pada nosel supersonik. Sedangkan untuk memprediksi energi kinetik turbulen, model turbulen RSM lebih baik.

Ucapan Terimakasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Direktorat Riset dan Pengabdian kepada Masyarakat (DRPM) Universitas Indonesia yang telah memberikan dana penelitian ini melalui skema "Hibah Publikasi Internasional Terindeks Untuk Tugas Akhir Mahasiswa UI 2016."

Referensi

[1] B.-A. Belega and T. D. Nguyen, Analysis of Flow in Convergent-Divergent Rocket

Engine Nozzle Using Computational Fluid Dynamics, in International Conference of Scientific Paper AFASES, Brasov, Romania, (2015).

- [2] J. Xu and C. Zhao, Two-dimensional Numerical Simulations of Shock Waves in Micro Convergent-Divergent Nozzles, International Journal of Heat and Mass Transfer. 50 (2007) 2434-2438.
- [3] O. J. Shariatzadeh, A. Abrishamkar, and A. J. Jafari, Computational Modeling of a Typical Supersonic Converging-Diverging Nozzle and Validation by Real Measured Data, Journal of Clean Energy Technologies. 3 (2015) 220-225.
- [4] G. R. Rao, U. S. Ramakanth, and A. Lakshman, Flow Analysis in a Convergent-Divergent Nozzle Using CFD. 1 (2013) 136-144.
- [5] J. Wu, X. Liu, and R. Radespiel, RANS simulations of a Tandem Nozzle Supersonic Wind Tunnel, Aerospace Science and Technology. 49 (2016) 215-224.
- [6] Y. Zhu and P. Jiang, Experimental and Analytical Studies on the Shock Wave Length in Convergent and Convergent-Divergent Nozzle Ejectors, Energy Conversion and Management. 88 (2014) 907-914.
- [7] M. S. Berana, Determination of Efficiency of Converging-Diverging Nozzles with Transcritical and Transonic Flow of CO₂, in Proceeding of the World Congress on Engineering, London, U.K., (2014).
- [8] H. Versteeg and W. Malalasekara, An Introduction to Computational Fluid Dynamics, the Finite Volume Method, 2nd ed., Pearson Educational Ltd., Essex, London, 2007.
- [9] B. Mohammadi and O. Pironneau, Analysis of the $k-\varepsilon$ Turbulence Model, P.G. Ciarlet and J-L. Lions. Masson, Paris, France, 1993.
- [10] V. Yakhot, S. A. Orszag, S. Thangam, T. B. Gatski, and C. G. Speziale, Development of Turbulence Models for Shear Flows by a Double Expansion Technique, Physics of Fluids A. 4 (1992) 1510-1520.