

## Penyelesaian PD Hypergeometry $F(c, k, c; x)$ atau $F(k, c, c; x)$ dengan $k$ sembarang

DJAROT B. DARMADI

### ABSTRACT

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Hypergeometri dalam bidang Teknik Mesin dipakai antara lain untuk menyelesaikan masalah dalam rangkaian listrik, resonansi, ilmu forensik material, analisa resiko generator, optimasi turbin Francis, dilaminasi dari komposit dan penyerap panas. Penyelesaian dari PDB Hypergeometri disebut dengan fungsi Hypergeometri atau biasa juga disebut dengan deret Hypergeometri. Tidak semua deret Hypergeometri konvergen ke dalam fungsi elementer. Telah dikenal untuk deret Hypergeometri  $F(1, c, c; x)$  akan konvergen kedalam deret MacLaurin  $1/(1-x)$ . Pada artikel ini didiskusikan deret Hypergeometri  $F(k, c, c; x)$  atau  $F(c, k, c; x)$ . Hasil telaah menunjukkan, bahwa  $F(k, c, c; x)$  atau  $F(c, k, c; x)$  akan selalu konvergen terhadap suatu nilai tertentu yang bisa dinyatakan dalam sebuah garis  $A + mx$  dimana koefisien  $A$  dan  $m$  merupakan fungsi  $x$  itu sendiri.

**Keywords:** PDB Hypergeometri, Fungsi Hypergeometri, Deret Hypergeometri.

### PENDAHULUAN

Matematika Rekayasa merupakan disiplin ilmu yang sedang berkembang dan melingkupi bidang diskusi yang luas. Perkembangan yang pesat dan kegunaannya yang luas termotivasi oleh kebutuhan para insinyur yang membutuhkan pondasi teoritis (Laoulache & Rice, 2015). Mohd *et al.* (2017) menggunakan metode numerik berdasar pendekatan Lattice Boltzmann untuk menggambarkan aliran bebats 3D yang melewati penghalang silinder dengan hasil yang mendekati hasil eksperimen. Kumar *et al.* (2017) mengembangkan model matematik untuk gelombang Reyleigh dalam media thermoelastic. Model dikembangkan berdasar kesetimbangan tegangan dan energi. Dari model yang dikembangkan diketahui, dengan meningkatnya angka gelombang, persamaan determinan sekuler dan nilai kecepatan dari gelombang Reyleigh menurun sedangkan koefisien redaman meningkat. Abouelella *et al.* (2018) menggunakan model matematika untuk menghitung kesetimbangan massa, perpindahan massa dan panas untuk menggambarkan penyerapan CO<sub>2</sub> pada beberapa jenis bahan. Chiba (2019) menggunakan metode transformasi differensial 2D untuk mendapatkan penyelesaian untuk konveksi natural diantara dua plat vertikal terhingga. Penyelesaiannya menggambarkan profile kecepatan yang tergantung kepada temperatur dari kedua plat. Bathavatchalam *et al.* (2019) mengembangkan sebuah program yang

menggunakan bahasa C untuk menggambarkan kelembaban dan desalinasi. Panas spesifik pada tekanan konstan dimodelkan menggunakan persamaan polinomial yang diperoleh dari data eksperimen. Mishra *et al.* (2015) mengevaluasi distribusi temperatur benda kerja dari proses pemesinan menggunakan EDM dengan pendekatan semi analitik. Pendekatan didasarkan pada metode transformasi integral dan evaluasi numerik dari integral yang diperoleh dari simulasi Monte Carlo. Chauhan dan Khare (2020) menganalisa pergerakan robot ABB IRB 152. Model matematika yang diusulkan ditulis dalam bentuk matrik dan dievaluasi menggunakan perangkat lunak RoboAnalyzer. Disimpulkan trayektori sikloida menghasilkan waktu total terkecil, dengan pergerakan yang halus dan bebas getaran. Seddiq dan Maerefat (2020) menemukan penyelesaian dari penukar panas plat dengan aliran melintang. Penyelesaian dikembangkan berdasar pada kekekalan energi dalam media inkompresibel tanpa sumber panas dan kekentalan (viskous) yang dianggap konstan. Dengan metode tersebut, diperoleh hasil yang bersesuaian dengan hasil eksperimen. Muhammad *et al.* (2020) mensimulasikan aksi pengadukan dalam sebuah photo bioreaktor. Mereka mendefinisikan sebuah parameter yang disebut dengan model kesetimbangan populasi untuk secara kuantitatif mengevaluasi kualitas lingkungan bagi pertumbuhan alga mikro. Berdasar hasil yang diperoleh dengan perangkat lunak dinamika fluida ANSYS/Fluent, diketahui bahwa photo bioreaktor dengan menggunakan penghalang memperbaiki aksi

pengadukan yang pada akhirnya akan memperbaiki kualitas lingkungan.

Persamaan differential biasa ordo (PDB) dua dapat menggambarkan banyak fenomena yang ditemui dalam bidang keteknikan. Tergantung derajat kerumitannya, PDB ordo dua bisa diselesaikan secara analitik atau dengan teknik numerik (Kreyszig *et al.*, 2011). Dua tipe pendekatan numerik utama dari persamaan differensial biasa adalah metode deret pangkat dan metode Frobenius yang ditentukan oleh koefisien-koefisien dari persamaan differensialnya yang analitik atau non-analitik.

Masalah keteknikan seperti halnya yang ditemui dalam bidang rangkaian listrik (Kampen, 1961), resonansi (Baker & Coon, 1970), matrik (Gross & Richards, 1987), ilmu forensik (Bates & Lambert, 1991), kimia (Sadygov & Yates), analisa resiko pada generator (Prayogo *et al.*, 2016), teknik sampling (Arnab, 2017), optimasi desain turbin Francis (Nakkena *et al.*, 2019), delaminasi komposit (Wass *et al.*, 2019), analisa thermal dari penyerap panas (Tartibu, 2020) dan perhitungan stokastik (Baker & Hayes, 2020) dapat diselesaikan menggunakan persamaan differential hypergeometry yang memiliki penyelesaian fungsi hypergeometri. PDB Hypergeometri diselesaikan menggunakan metode Frobenius dikarenakan koefisien-koefisien dari PDB dalam bentuk standar adalah non-analitik.

Mubeen *et al.* (2014) dan Li dan Dong (2019) menemukan penyelesaian sekelompok PDB Hypergeometri dimodifikasi, disebut PDB k-Hypergeometri. Mereka menemukan penyelesaian untuk PDB k-Hypergeometri pada seluruh titik-titik disekitar nilai singularnya. Yilmazer *et al.* menemukan jawaban homogen dan non-homogen dari pecahan diskrit untuk fungsi Hypergeometric anakan (Yilmazer *et al.*, 2016). Mereka menggunakan operator calculus nabla untuk menyelesaikan integrasinya sebagaimana biasa diaplikasikan pada metode klasik. Kalkulus pecahan fractional membutuhkan usaha komputasi yang masif, dan penggunaan PDB Hypergeometri menawarkan cara alternatif untuk mendapatkan jawaban. Iskhanyan dan Iskhanyan (2018) menyelesaikan persamaan Heun anakan menggunakan penyelesaian Hypergeometri anakan yang digeneralisir. Persamaan Heun ditemukan secara luas dalam penelitian terbaru Fisika sebagaimana fisika partikel dan atom, teori lubang hitam, relativitas dan kosmologi umum.

Tidak semua penyelesaian PDB Hypergeometri konvergen menjadi fungsi aljabar sederhana. Atrikel ini mendiskusikan jawaban PDB Hypergeometri yang tidak konvergen terhadap fungsi aljabar sederhana tersebut.

### PDB HYPERGEOMETRI

Dalam bentuk aslinya, PDB Hypergeometri dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$x(1-x)\frac{d^2x}{dy^2} + \{c - (a+b+1)x\}\frac{dy}{dx} - aby \quad (1)$$

Menggunakan metode Frobenius, pernyataan untuk y dan turunan-turunannya bisa dituliskan dalam bentuk:  $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$ ;  $\frac{dy}{dx} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r-1}$  dan  $\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-2}$ . Dengan substitusi ekspresi-ekspresi ini ke dalam persamaan (1) dan mengelompokkan x dengan pangkat yang sama, dihasilkan:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{r^2 + (2m+c-1)r + (m^2 + cm - m)\}a_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} \{r^2 + (2m+a+b)r + (m^2 + am + bm + ab)\}a_m x^{m+r} = 0 \quad (2)$$

Mengevaluasi koefisien dari x dengan pangkat terendah, yakni,  $x^{(r-1)}$ , dan membuatnya sama dengan nol menghasilkan apa yang biasa disebut dengan persamaan indicial:

$$r(r+c-1)r=0$$

yang memiliki penyelesaian:  $r = r_1 = 0$  dan  $r = r_2 = 1 - c$ . Jika dievaluasi untuk kasus  $r = r_1$  dan disubstitusikan kedalam (2), maka diperoleh:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m^2 + cm - m)a_m x^{m-1} - \sum_{m=0}^{\infty} (m^2 + am + bm + ab)a_m x^m = 0$$

dan dengan substitusi  $s = m-1$  untuk suku yang pertama dan  $m = s$  untuk suku kedua maka diperoleh:

$$\sum_{s=-1}^{\infty} \{(s^2 + 2s + 1) + (cs + c) - (s + 1)\}a_{s+1}x^s - \sum_{s=0}^{\infty} (s^2 + as + bs + ab)a_s x^s = 0$$

Dan karena untuk  $s = -1$ , koefisien untuk suku yang pertama adalah nol, maka:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \{(s^2 + 2s + 1) + (cs + c) - (s + 1)\}a_{s+1}x^s - \sum_{s=0}^{\infty} (s^2 + as + bs + ab)a_s x^s = 0$$

Terakhir, dengan membuat semua koefisien dari  $x^s$  sama dengan nol, dihasilkan persamaan rekursi:

$$a_{s+1} = \frac{(a+s)(b+s)}{(c+s)(s+1)} a_s \quad (3)$$

### RADIUS KONVERGENSI

Jawaban dari metode deret pangkat adalah:  $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$  dan memiliki arti praktis jika jawaban tersebut konvergen. Nilai dari variabel bebas  $x$  dimana jawaban akan konvergen dapat dievaluasi menggunakan radius konvergensi. Radius konvergensi dapat ditentukan menggunakan persamaan berikut:

$$R = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{s+1}}{a_s} \right|} = \frac{1}{\frac{(a+\infty)(b+\infty)}{(c+\infty)(1+\infty)}} = \frac{1}{\frac{\infty \cdot \infty}{\infty \cdot \infty}} = 1$$

Jadi, jawaban dari PDB Hipergeometri (1) hanya akan konvergen jika  $x$  terletak pada harga  $-1 < x < 1$ .

### FUNGSI HYPERGEOMETRI

Dengan mensimulasikan persamaan rekursi  $s = 0, 1, 2, 3, \dots$  dapat diketahui nilai dari koefisien-koefisien deret pangkat:

$$a_1 = \frac{ab}{1!c} a_0$$

$$a_2 = \frac{(a+1)ab(b+1)}{2!c(c+1)} a_0$$

$$a_3 = \frac{(a+2)(a+1)ab(b+1)(b+2)}{2!c(c+1)(c+2)} a_0$$

...  
 Dengan mengambil  $r = r_1 = 0$  dan mengikuti metode Frobenius, jawaban dari PDB adalah:  $y = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+r}$ . Sehingga jawaban dari PDB Hypergeometri yang dicari adalah:

$$y = a_0 \left( 1 + \frac{ab}{1!c} x + \frac{(a+1)ab(b+1)}{2!c(c+1)} x^2 + \frac{(a+2)(a+1)ab(b+1)(b+2)}{2!c(c+1)(c+2)} x^3 + \dots \right) \quad (4)$$

Suku-suku dalam tanda kurung disebut dengan deret Hypergeometri atau fungsi Hypergeometri dan biasa dinyatakan sebagai  $F(a, b, c; x)$ . Maka,

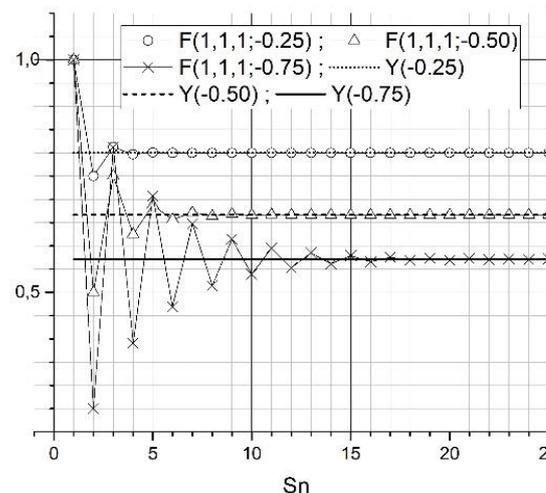
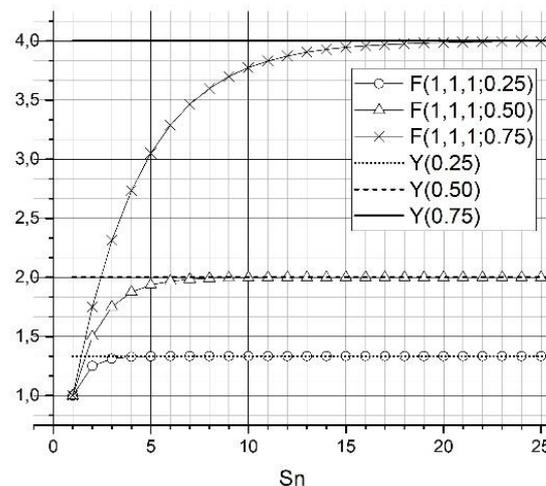
$$F(a, b, c; x) = 1 + \frac{ab}{1!c} x + \frac{(a+1)ab(b+1)}{2!c(c+1)} x^2 + \frac{(a+2)(a+1)ab(b+1)(b+2)}{2!c(c+1)(c+2)} x^3 + \dots \quad (5)$$

Perlu digaris bawahi disini, bahwa nilai dari koefisien  $c$  tidak sama dengan 0 atau bilangan bulat negatif, yang akan menghasilkan jawaban non-analitik jika diterapkan persamaan (5).

$$F(1, 1, 1; x)$$

Fungsi  $F(1, 1, 1; x)$  merupakan kasus khusus, karena jawabannya akan konvergen sebuah fungsi aljabar sederhana. Fungsi Hypergeometri yang diperoleh dengan

menyamakan  $a, b,$  dan  $c$  sama dengan satu pada persamaan (4) adalah:  $y = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ . Deret ini merupakan deret Maclaurin yang konvergen ke persamaan aljabar sederhana:  $y = \frac{1}{1-x}$ . Perlu dicatat untuk mendapatkan deret Maclaurin yang konvergen, harga  $x$  harus ada dalam rentang  $-1 < x < 1$ . Gambar 1 menunjukkan fungsi  $F(1, 1, 1; x)$ , dimana sumbu mendatar menyatakan jumlah suku yang digunakan dalam mencari jumlah dari persamaan Hypergeometri dari persamaan (5).



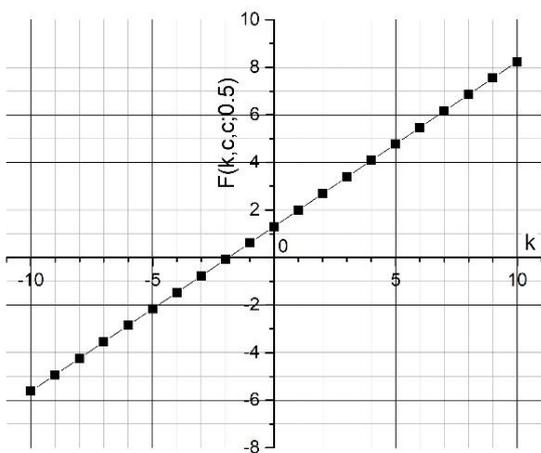
GAMBAR 1. Fungsi Hypergeometri untuk  $a=b=c=1$  untuk beberapa nilai  $x$ .

$$F(K, C, C; x) \text{ ATAU } F(C, K, C; x)$$

Diskusi tentang deret Hypergeometri yang didiskusikan sebelumnya dapat ditemukan dalam berbagai buku Matematika Rekayasa (Matematika Teknik, *Engineering Mathematics*). Pada tulisan ini ingin dibuat sebuah langkah maju dengan melakukan investigasi kasus dimana nilai dari koefisien  $a$

atau b sama dengan sebuah konstanta sembarang k (bukan hanya 1), yaitu akan diperoleh fungsi Hypergeometri yang identik:  $F(k, c, c; x)$  dan  $F(c, k, c; x)$ . Telah dilakukan observasi sebelumnya, nilai dimana fungsi Hypergeometri akan konvergen tergantung kepada x, dan bahwa evaluasi akan dilakukan untuk koefisien-koefisien a atau b tidak hanya sama dengan 1 tetapi sama dengan sembarang nilai k, yang akan menghasilkan sejumlah besar fungsi-fungsi yang mungkin (yaitu garis-garis dalam bidang x-y).

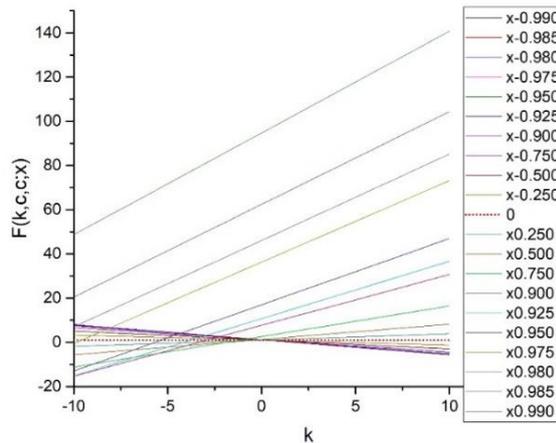
Demi kemudahan diskusi, pertama dievaluasi deret Hypergeometri dengan mengambil  $x = 0.5$ , yaitu  $F(k, c, c; 0.5)$  and  $F(c, k, c; 0.5)$ , dimana keduanya akan menghasilkan nilai yang sama. Jika persamaan (5) diterapkan untuk mensimulasikan perilaku dari deret, ditemukan bahwa deret Hypergeometri akan konvergen ke nilai-nilai seperti ditunjukkan pada Gambar 2. Derajat konvergensi dianggap cukup dengan mengakomodasi 500 suku dari persamaan (5). Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2, adalah menarik untuk mengevaluasi nilai final dari deret geometri akan terletak pada sebuah garis pada bidang k-F yang akan berganti garisnya tergantung terhadap variabel bebas x. Implikasi dari temuan ini adalah sekali dari dua harga fungsi F diketahui untuk variabel k, nilai F yang lain dapat diperoleh menggunakan interpolasi atau ekstrapolasi linier dari dua nilai yang diketahui tadi, dan semua nilai perhitungan untuk F akan terletak pada garis yang sama untuk nilai x tertentu.



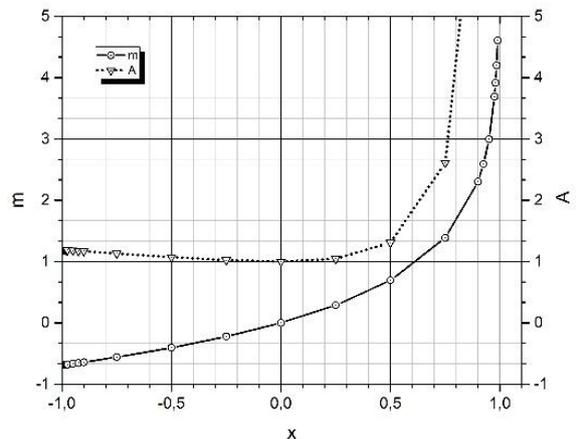
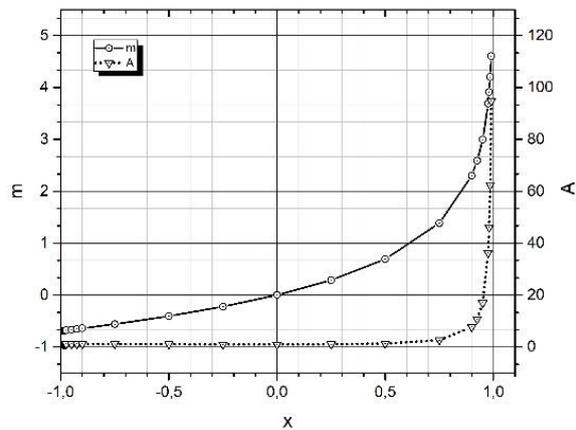
GAMBAR 2. Nilai dari  $F(k, c, c; 0.5)$ .

Sebagaimana telah dinyatakan sebelumnya, nilai dimana fungsi Hypergeometri akan konvergen tergantung terhadap nilai x. Gambar 2 menyajikan evaluasi dari F untuk x sama dengan 0.5. Jika metode yang sama diaplikasikan untuk harga x yang lain (dengan

batasan  $-1 < x < 1$ ) diperoleh gambar seperti disajikan pada Gambar 3.



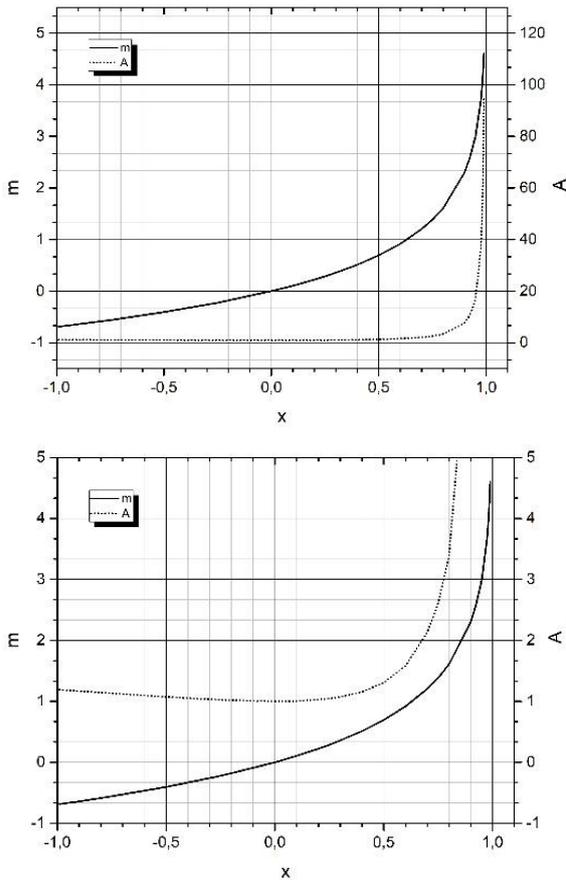
GAMBAR 3. Nilai  $F(k, c, c; x)$  sebagai fungsi k.



GAMBAR 4. Slope (kemiringan) - m dan konstanta A untuk garis-garis pada Gambar 3; harga A dan m valid untuk semua nilai k; plot pada gambar atas diskala ulang pada gambar bawah untuk kemudahan.

Gambar 3 menunjukkan bahwa jika parameter bebas k yang berubah untuk setiap harga x tertentu, maka  $F(k, c, c; x)$  terletak dalam sebuah garis lurus. Karena persamaan dari sebuah garis lurus adalah  $y = A + mx$ , dimana m adalah slope dari garis dan A adalah nilai dari

y ketika garis memotong sumbu tegak ( $k = 0$ ), maka semua garis pada gambar 3 bisa dinyatakan dalam bentuk  $F(k, c, c; x) = A(x) + m(x) \cdot k$ . Gambar 4 menunjukkan harga  $A(x)$  dan  $m(x)$  untuk berbagai nilai variabel bebas  $x$  untuk sembarang parameter bebas  $k$ . Kurva yang lebih halus ditunjukkan pada Gambar 5, dimana lebih banyak nilai  $x$  positif yang digunakan untuk mendapatkan harga  $A$  dan  $m$ . Pada Tabel 1 ditunjukkan data yang digunakan untuk menyusun Gambar 5.



GAMBAR 5. Slope ( $m$ ) dan harga ( $A$ ) untuk fungsi  $F(k, c, c; x)$ ; jumlah  $x$  yang lebih besar dipakai untuk mendapatkan kurva yang lebih halus; skala pada sisi kanan diatur ulang untuk mendapatkan hasil yang lebih bagus.

Gambar 3 menunjukkan bahwa jika parameter bebas  $k$  yang berubah untuk setiap harga  $x$  tertentu, maka  $F(k, c, c; x)$  terletak dalam sebuah garis lurus. Karena persamaan dari sebuah garis lurus adalah  $y = A + mx$ , dimana  $m$  adalah slope dari garis dan  $A$  adalah nilai dari  $y$  ketika garis memotong sumbu tegak, maka semua garis pada gambar 3 bisa dinyatakan dalam bentuk  $F(k, c, c; x) = A(x) + m(x)k$ . Gambar 4 menunjukkan harga  $A(x)$  dan  $m(x)$  untuk berbagai nilai variabel bebas  $x$  untuk sembarang parameter bebas  $k$ . Kurva yang lebih halus ditunjukkan pada Gambar 5, dimana lebih

banyak nilai  $x$  positif yang digunakan untuk mendapatkan harga  $A$  dan  $m$ . Pada Tabel 1 ditunjukkan data yang digunakan untuk menyusun Gambar 5.

TABEL 1. Slope ( $m$ ) and harga ( $A$ ) u  $F(k, c, c; x)$ ; nilai yang ditabelkan valid untuk semua harga  $k$ .

	$x-0.99$	$x-0.985$	$x-0.98$	$x-0.975$	$x-0.95$
$A$	1.1939	1.1897	1.1882	1.1869	1.1806
$m$	-0.6881	-0.6856	-0.6831	-0.6806	-0.6678
	$x-0.925$	$x-0.9$	$x-0.75$	$x-0.5$	$x-0.25$
$A$	1.1744	1.1682	1.1310	1.0721	1.0231
$m$	-0.6549	-0.6419	-0.5596	-0.4055	-0.2231
	$x0$	$x0.1$	$x0.2$	$x0.25$	$x0.3$
$A$	1.0000	1.0058	1.0269	1.0457	1.0719
$m$	0.0000	0.1054	0.2231	0.2877	0.3567
	$x0.4$	$x0.5$	$x0.6$	$x0.7$	$x0.75$
$A$	1.1558	1.3069	1.5837	2.1294	2.6137
$m$	0.5108	0.6931	0.9163	1.2040	1.3863
	$x0.8$	$x0.9$	$x0.925$	$x0.95$	$x0.975$
$A$	3.3906	7.6974	10.7431	17.0043	36.3110
$m$	1.6094	2.3026	2.5903	2.9957	3.6889
	$x0.98$	$x0.985$	$x0.99$		
$A$	46.0860	62.4327	94.7455		
$m$	3.9120	4.1996	4.6041		

Untuk mengevaluasi kebenaran Gambar 5 dan/atau Tabel 1, maka dievaluasi harga dari fungsi geometri  $F(k, c, c; x)$  ketika  $k = 1$  dan untuk tiga buah harga variabel bebas  $x$ , yakni fungsi-fungsi  $F(1, c, c; 0.25)$ ,  $F(1, c, c; 0.5)$ , dan  $F(1, c, c; 0.75)$ . Harga-harga dari fungsi tersebut adalah secara berturut-turut  $1\frac{1}{3}$ , 2 dan, 4. Harga-harga ini bisa dihitung secara langsung dari deret Maclaurin, sebagaimana telah didiskusikan sebelumnya, akan konvergen keharga  $1/(1-x)$ . Dikarenakan Gambar 5 (atau Tabel 1) valid untuk semua harga  $k$ , maka Gambar 5 atau Tabel 1 selalu bisa digunakan untuk memperoleh harga  $A$  dan  $m$  untuk setiap harga  $x$ . Untuk harga  $x$  sama dengan 0.25, 0.5, dan 0.75 harga  $A$  secara berurutan adalah 1.0457, 1.3069 dan 2.6137, dan harga  $m$  adalah 0.2877, 0.6931 dan 1.3863. Jika kita pakai harga-harga untuk  $A$  dan  $m$  dalam persamaan garis  $F(1, c, c; x) = A + mx$  untuk  $x$  sama dengan 0.25, 0.5 dan 0.75, dan  $k = 1$ , dan bisa dievaluasi nilai dari  $F(1, c, c; 0.25)$ ,  $F(1, c, c; 0.5)$ , dan  $F(1, c, c; 0.75)$  secara berurutan adalah 1.3333, 2.0000, dan 4.0000, yang konsisten dengan harga yang diperoleh dengan menggunakan deret Maclaurin yang mengkonfirmasi kebenaran Gambar 5 dan/atau Table 1. Pengujian yang sama dapat diulang untuk

fungsi Hypergeometri untuk harga  $x$  negatif semisal  $F(1, c, c; -0.25)$ ,  $F(1, c, c; -0.5)$ , dan  $F(1, c, c; -0.75)$ . Deret Maclaurin yang bersesuaian adalah  $1/1.25=0.8$ ,  $1/1.5=0.6667$ , dan  $1/1.75=0.5714$ . Jika langkah-langkah sebelumnya diulang untuk mendapatkan  $A$  dan  $m$  dari Gambar 5 atau Tabel 1, dan menggunakan harga-harga yang diperoleh untuk mendapatkan persamaan garis  $F(k, c, c; x) = A + mk$ , harga-harga untuk  $F(1, c, c; -0.25)$ ,  $F(1, c, c; -0.5)$ , dan  $F(1, c, c; -0.75)$  secara berurutan adalah sama dengan 0.8000, 0.6667, dan 0.5714, yang sekali lagi mengkonfirmasi kebenaran pendekatan yang diusulkan.

Dikarenakan fungsi  $F(k, c, c; x)$  meliputi seluruh rentang  $c$ , penyelesaiannya akan selalu ada bahkan jika  $c$  bernilai nol atau bilangan bulat negatif, dikarenakan bentuk dari suku-suku pada persamaan (5) menghasilkan penyebut menjadi nol. Ketika  $x$  sama dengan nol, slope  $m$  akan menjadi nol (garis horizontal) dan fungsi  $F(k, c, c; 0)$  akan selalu berharga 1 yang mana juga dikonfirmasi dengan deret Maclaurin.

#### KESIMPULAN

Pada diskusi kali ini, telah diperoleh hasil yakni suatu nilai tertentu dari PDB Hypergeometri yakni  $F(k, c, c; x)$  atau  $F(c, k, c; x)$ . Nilai yang dicari tergantung terhadap nilai  $k$  dan nilai  $x$ . Untuk nilai  $x$  tertentu, harga  $F(k, c, c; x)$  atau  $F(c, k, c; x)$  dengan variasi  $k$  terletak pada garis lurus dengan persamaan  $F = A + mk$  dengan  $A$  dan  $m$  tergantung nilai dari  $x$ .

#### DAFTAR PUSTAKA

- Abouelella, Dina M.; Fateen, Seif-Eddeen K.; and Fouad, Mai M.K. (2018). Multiscale modeling study of the adsorption of CO<sub>2</sub> using different capture materials. *Evergreen Joint Journal of Novel Carbon Resource Science & Green Asia Strategy*, vol. 5, no. 1, pp. 45-51.
- Arnab, Raghunat (2017). Two-phase sampling. Survey sampling theory and applications. pp. 325-365, Academic Press, ISBN 978-0-12-811848-1.
- Baker, M. and Coon, D.D. (1970). Dual resonance theory with nonlinear trajectories. *Physical Review D*, vol. 2, no. 10, pp. 2349 – 2358.
- Baker, Timothy J. and Hayes, John P. (2020). Bayesian accuracy analysis of stochastic circuits. Computer Aided Design (ICCAD) IEEE/ACM International Conference, pp. 1-9.
- Bates, J.W. and Lambert, J.A. (1991). Use of the hypergeometric distribution for sampling in forensic glass comparison. *Journal of the Forensic Science Society*, vol. 31, no. 4, pp. 449 – 455.
- Bakthavatchalam, Balaji; Rajasekar, K.; Habib, K.; Saidur, R.; and Basrawi, Firdaus (2019). Numerical analysis of humidification dehumidification desalination system. *Evergreen Joint Journal of Novel Carbon Resource Science & Green Asia Strategy*, vol. 6, no. 1, pp. 9-17.
- Chauhan, Shailendra Singh; and Khare, Avadesh Kumar (2020). Kinematic analysis of the ABB IRB 1520 industrial robot using RoboAnalyzer software. *Science & Green Asia Strategy*, vol. 7, no. 4, pp.510-518.
- Chiba, Rhoichi (2019). Natural convection analysis of water near its density extremum between finite vertical plates: a differentiation transform approach. *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, vol. 9, no. 4, pp. 429 – 448.
- Gross, Kenneth I. and Richards, Donald ST. P. (1987). Special functions of matrix argument. I: Algebraic induction, zonal polynomials, and hypergeometric functions. *Transactions of The American Mathematical Society*, vol. 301, no. 2, pp. 781 – 811.
- Ishkhanyan, T.A.; and Inskhanyan, A.M. (2018). Generalized confluent hypergeometric solutions of the Heun confluent equation. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 338, pp. 624 – 630.
- Kampen, N.G. Van (1961). Exact calculation of the fluctuation spectrum for a nonlinear model system. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 2, no. 4, pp. 592 – 601.
- Kreyszig, Erwin; Kreyszig, Herbert; and Norminton, Edward J. (2011). Advanced engineering mathematics. John Wiley & Sons, Inc., ISBN 978-0-470-45836-5.

- Kumar, Arvind; Kumar, Rajneesh; and Abo-Dahab, S.M. (2017). Mathematical model for rayleigh waves in microstretch thermoelastic medium with microtemperature. *Journal of Applied Science and Engineering*, vol. 20, no.2, pp. 149 – 156.
- Laoulache, Raymond N.; and Rice, John M. (2015). Advanced engineering mathematics: applications guide. Wiley, ISBN : 978-1-118-98929-6.
- Li, Shengfeng; and Dong, Yi (2019). k-Hypergeometric series solution to one type of non-homogeneous k-Hypergeometric equations. *Symmetry*, vol.11, no. 262, doi: 10.3390/sym11020262, pp. 1-11.
- Mishra, Abhishek; Bhattacharya, Sujay; Datta, Debabrata; and Dey, Gautam Kumar (2015). Analytical studies of temperature distribution of workpiece in electric discharge machining using semi analytical electro thermal model. *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, vol. 6, no. 4, pp. 337 – 362.
- Mohd, Nik; Kamra, Mohamed M.; Sueyoshi, Makato; and Hu, Changhong (2017). Lattice Boltzmann method for free surface impacting on vertical cylinder: a comparison with experimental data. *Evergreen Joint Journal of Novel Carbon Resource Science & Green Asia Strategy*, vol. 4, no. 1/2, pp. 28-37.
- Mubeen, Shahid; Naz, Mammona; Rehman, Abdur; and Rahman, Gauhar (2014). Solution of k-Hypergeometric differential equation. *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2014, doi: 10.1155/2014/128787, pp. 1-13.
- Muhammad, Hafidho Ilham; Rahman, Arif; Prihantini, Nining Betawati; Deendarlianto; and Nasruddin (2020). The application of poly-dispersed flow on rectangular airlift photobioreactor mixing performance. *Science & Green Asia Strategy*, vol. 7, no. 4, pp.571-579.
- Nakkina, Parameswara Rao; Prakash, K. Arul; and Kumar, G. Saravana (2019). A surrogate model-based method to obtain optimal design in spiral casing of Francis turbine. *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, vol. 9, no. 2, pp. 105 – 126.
- Prayogo, Galang Sandy; Haryadi, Gunawan Dwi; Ismail, Rifky; and Kim, Seon Jin (2016). Citation: *AIP Conference Proceedings* 1725, 020062 (2016); doi: 10.1063/1.4945516.
- Sadygov, Rovshan G. and Yates, John R. (2003). A hypergeometric probability model for protein identification and validation using tandem mass spectral data and protein databases. *Anal. Chem.*, vol. 75, no. 15, pp. 3792 – 3798.
- Seddiq, Mehdi; and Maerefat, Mehdi (2020). Analytical solution for heat transfer problem in a cross-flow plate heat exchanger. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 163, 120410, 13ps.
- Tartibu, Lagouge Kwanda (2020). Numerical analysis of thermal performance of a trapezoidal micro-channel heat sink using an improved version of the augmented  $\varepsilon$ -constraint method. *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, vol. 10, no. 1, pp. 49 – 67.
- Waas, Victor D.; Hidayat, Mas Irfan P; and Noerochim, Lukman (2019). Finite element simulation of delamination in carbon fiber/epoxy laminate using cohesive zone model: effect of meshing variation. *Materials Science Forum*, vol. 964, pp. 257-262.
- Yilmazer, Resat; Inc, Mustafa; Tchier, Fairouz; and Baleanu, Dumitru (2016). Particular solutions of the confluent hypergeometric differential equation by using the Nabla fractional calculus operator. *Entropy*, vol. 18, no. 49, doi: 10.3390/e18020049, pp 1-6.

---

PENULIS:

Djarot B. Darmadi

Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Brawijaya, Malang.

Email: b\_darmadi\_djarot@ub.ac.id